

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ
им. В.А. Трапезникова РАН

С.А. КРАСНОВА В.А. УТКИН

КАСКАДНЫЙ СИНТЕЗ
НАБЛЮДАТЕЛЕЙ СОСТОЯНИЯ
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

МОСКВА НАУКА
2006

УДК 004.45
ББК 32.817
К78

Ответственный редактор
доктор технических наук А.П. Курдюков

Рецензенты:
член-корреспондент РАН А.А. Меликян
доктор технических наук Б.Т. Поляк

Краснова С.А.

Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем, С.А. Краснова, В.А. Уткин; [отв. Ред. А.П. Курдюков]; Ин-т проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. –М.: Наука, 2006. – 272 с.: 38 ил. – ISBN 5-02-033678-5 (в пер.).

Представлены теоретические основы каскадного синтеза наблюдателей состояния, заключающиеся в представлении исходной динамической модели объекта управления в блочно-наблюдаемой форме и использовании методов синтеза систем с глубокими обратными связями и разрывными управлениями, функционирующими в скользящем режиме. Методология и алгоритмы каскадного синтеза наблюдателей состояния разработаны применительно к многомерным непрерывным линейным и нелинейным системам общего вида, функционирующим в условиях параметрической неопределенности и при действии внешних неконтролируемых возмущений. Особенности предлагаемого каскадного подхода являются: декомпозиция многомерной задачи синтеза корректирующих воздействий наблюдателя на независимо решаемые элементарные подзадачи меньшей размерности; существенное упрощение алгоритмического обеспечения и экономия вычислительных ресурсов; расширение класса наблюдаемых систем за счет обеспечения инвариантности к параметрическим неопределенностям и внешним возмущениям. В качестве приложений рассмотрены задачи управления при неполных измерениях электроприводами различных типов, роботами-манипуляторами, системой топливоподачи двигателей внутреннего сгорания.

Для научных работников, аспирантов, инженеров и преподавателей, специализирующихся в области теории и практики теории управления.

ISBN 5-02-033678-5

© Краснова С.А., Уткин В.А., 2006
© Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, 2006
© Редакционно-издательское оформление.
Издательство «Наука», 2006

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
Глава 1. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ НАБЛЮДАТЕЛИ СОСТОЯНИЯ. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ.....	11
1.1. Асимптотический наблюдатель состояния полного порядка.....	11
1.2. Наблюдатель Люенбергера.....	14
1.3. Асимптотические наблюдатели при параметрической неопределенности.....	15
1.4. Асимптотические наблюдатели при наличии внешних возмущений.....	17
1.5. Наблюдаемость нелинейных систем.....	19
Часть 1. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ	21
Глава 2. КАСКАДНЫЙ СИНТЕЗ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ.....	22
2.1. Постановка задачи.....	22
2.2. Конструктивный анализ структурных свойств наблюдаемости.....	22
2.3. Каскадный синтез наблюдателей состояния на основе метода разделения движений.....	28
2.3.1. Каскадный синтез корректирующих воздействий в классе систем с большими коэффициентами.....	29
2.3.2. Каскадный синтез разрывных корректирующих воздействий.....	32
2.4. Блочный синтез асимптотических наблюдателей состояния с конечными коэффициентами.....	38
2.5. Задача слежения при неполных измерениях.....	41
2.5.1. Описание проблемы. Постановка задачи.....	41
2.5.2. Совместная блочная форма наблюдаемости и управляемости по выходным переменным.....	44
2.6. Идентификация многомерных динамических систем на скользящих режимах.....	50
2.6.1. Постановка задачи.....	50
2.6.2. Совместная блочная форма управляемости и наблюдаемости при параметрической неопределенности.....	51
2.6.3. Совместное решение задач идентификации и наблюдения.....	54
Глава 3. КАСКАДНЫЙ СИНТЕЗ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ.....	57
3.1. Постановка задачи.....	57
3.2. Конструктивный анализ структурных свойств наблюдаемости.....	60
3.3. Каскадный синтез наблюдателя состояния на скользящих режимах.....	65
Часть 2. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ	69
Глава 4. КАСКАДНЫЙ СИНТЕЗ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ СОСТОЯНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ.....	69
4.1. Постановка задачи.....	69
4.2. Конструктивный анализ структурных свойств наблюдаемости.....	73
4.3. Каскадный синтез наблюдателя состояния на скользящих режимах.....	77
4.4. Каскадный синтез наблюдателя состояния с непрерывными корректирующими воздействиями.....	81
4.5. Блочно-наблюдаемая форма с максимальным сохранением нелинейностей.....	90
Глава 5. КАСКАДНЫЙ СИНТЕЗ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ СОСТОЯНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ.....	95
5.1. Постановка задачи.....	95

5.2. Конструктивный анализ структурных свойств наблюдаемости.....	96
5.3. Каскадный синтез наблюдателя на скользящих режимах.....	113
5.4. Каскадный синтез наблюдателя состояния с непрерывными корректирующими воздействиями.....	117
5.5. Прямой синтез наблюдателя на скользящих режимах.....	123
Часть 3. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ.....	128
Глава 6. КАСКАДНЫЙ СИНТЕЗ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ СОСТОЯНИЯ АСИНХРОННОГО ЭЛЕКТРОПРИВОДА.....	128
6.1. Описание динамической модели асинхронного двигателя (АД).....	129
6.2. Приведение динамической модели АД к блочно–наблюдаемой форме.....	129
6.3. Каскадный синтез наблюдателя АД на основе метода разделения движений.....	130
6.4. Каскадный синтез наблюдателя АД с конечными коэффициентами.....	133
Глава 7. КАСКАДНЫЙ СИНТЕЗ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ МАНИПУЛЯТОРОМ С УЧЕТОМ ДИНАМИКИ ИСПОЛНИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ.....	136
7.1. Описание объекта управления. Постановка задач.....	137
7.2. Синтез управления в механической подсистеме.....	141
7.2.1. Синтез управления на основе метода разделения движений.....	141
7.2.2. Синтез комбинированного управления.....	143
7.3. Синтез управления в исполнительных устройствах.....	146
7.3.1. Синтез управления при жестком типе сочленений.....	147
7.3.2. Синтез управления при эластичном типе сочленений.....	149
7.4. Информационное обеспечение базовых алгоритмов управления.....	154
7.4.1. Каскадный синтез наблюдателя состояния при отсутствии возмущений.....	155
7.4.2. Каскадный синтез наблюдателя состояния в условиях неопределенности.....	156
7.4.3. Каскадный синтез наблюдателя состояния преобразованных переменных.....	157
7.5. Задачи управления угловым положением маятника в условиях неопределенности.....	159
7.5.1. Описание объекта управления. Постановка задач.....	160
7.5.2. Обеспечение заданной точности слежения.....	160
7.5.3. Обеспечение экспоненциальной сходимости.....	163
Глава 8. ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДВИГАТЕЛЕМ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯ (ДВС).....	166
8.1. Каскадный синтез систем управления при релейных измерениях.....	167
8.1.1. Постановка задач.....	167
8.1.2. Аппаратный способ.....	168
8.1.3. Восстановление начальных условий по релейным измерениям.....	172
8.1.4. Непосредственное замыкание обратной связи по релейным измерениям.....	177
8.1.5. Стабилизация линейных систем с релейными измерениями при наличии запаздывания.....	179
8.2. Управление топливоподачей в ДВС с обратной связью по λ -зонду.....	183
8.2.1. Модель объекта управления. Постановка задачи.....	183
8.2.2. Результаты моделирования.....	185
8.3. Каскадный синтез наблюдателя переменных воздушного тракта ДВС.....	190
8.3.1. Описание динамической модели воздухоподачи.....	191
8.3.2. Синтез наблюдателя состояния на основе модели разомкнутого контура воздухоподачи.....	193
8.3.3. Дополнительная коррекция по обратной связи.....	195
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	198

ВВЕДЕНИЕ

В монографии предлагаются декомпозиционные подходы к изучению структурных свойств наблюдаемости конечномерных динамических систем на основе блочного представления и последующего синтеза наблюдателей состояний в рамках систем с разделяемыми движениями.

Разделение движения систем по темпам *в задачах управления* при использовании методов синтеза систем с глубокими обратными связями и разрывными управлениями, функционирующими в скользящем режиме, позволяют декомпонировать процедуру синтеза обратной связи на независимо решаемые подзадачи меньшей размерности. По сути, применение этих методов в цепи обратной связи позволяет искусственно вычленив в модели объекта управления сингулярно возмущенную подсистему с заданными свойствами и степенью сингулярности и, как следствие, пренебрегая быстрой динамикой, понизить порядок задачи синтеза. Дальнейшая декомпозиция синтеза систем связана с применением блочного управления, идея которого основана на последовательном использовании части компонент вектора состояний в качестве фиктивных (фазовых) управлений в подзадачах меньшей размерности вплоть до выбора истинных управлений в последней подзадаче. За счет иерархии выбора коэффициентов усиления в каждой из подзадач удается разделить движения системы на разнотемповые составляющие, что декомпозирует замкнутую систему на подсистемы различной степени сингулярности. Помимо декомпозиции, исследователей привлекает тот факт, что скользящие движения в системах с разрывными управлениями и медленные движения в системах с глубокими обратными связями обладают известными свойствами инвариантности к внешним и параметрическим возмущениям.

Тем не менее, на практике часто возникают проблемы реализации как скользящих режимов в системах с разрывными управлениями, так и медленных движений в системах с глубокими обратными связями. В частности, в системах с разрывными управлениями это связано с наличием неучтенных в модели объекта управления паразитных динамик и физической реализуемостью релейных управлений. В системах с большими коэффициентами действуют ограничения на их выбор, связанные с обеспечением устойчивости замкнутых систем при наличии паразитных динамик, и физические ограничения, налагаемые на фиктивные и истинные управления. Исключением являются объекты управления с ключевой природой управляющих воздействий, в частности, электроприводы, для которых непосредственное применение методов синтеза систем с разрывными управлениями представляется естественным, поскольку автоматически позволяют реализовать различные виды широтно-импульсной модуляции.

Во многом проблемы реализации разрывных управлений и глубоких обратных связей снимаются при использовании в цепи обратной связи асимптотических наблюдателей состояний. Во-первых, динамика наблюдателя формируется в вычислительной среде регулятора и, следовательно, снимаются вопросы физической реализуемости и неучтенной динамики объекта управления при синтезе собственно наблюдателя в классах систем с разрывными управлениями или глубокими обратными связями, что обеспечивает как декомпозицию процедуры синтеза, так и инвариантные свойства. Во-вторых, при замыкании обратной связи через наблюдатель появляется возможность использовать методы синтеза систем с разделяемыми движениями для формирования физических управлений. Быстрые движения сосредотачиваются в контуре наблюдателя, который не содержит неучтенной динамики объекта управления, что позволяет обеспечить скользящий режим, близкий к теоретическому для разрывных управлений и ослабить условия на величину коэффициентов усиления для непрерывного управления. В-третьих, при использовании асимптотических наблюдателей снимается также и проблема реализуемости физических управлений объекта управления – используя оценки, получаемые с выхода наблюдателя, появляется возможность формировать управления заданного класса, причем компенсация неопределенностей осуществляется за счет комбинированного управления.

Кроме того, за счет использования методов синтеза систем с разделяемыми движениями в наблюдателе удастся использовать известные преимущества (декомпозицию и инвариантность) этого класса систем для получения оценок вектора состояний и неконтролируемых возмущений, в том числе и за конечное время, при использовании разрывных корректирующих воздействий наблюдателя. Последнее замечание представляется весьма существенным, поскольку позволяет декомпозировать задачи анализа и синтеза расширенной системы (модель управления плюс модель наблюдателя) на независимые подзадачи управления объектом и наблюдателем. Действительно, независимое рассмотрение переходных процессов в асимптотическом наблюдателе и замкнутой системы управления может оказаться недопустимым именно в силу асимптотической сходимости оценок к истинным значениям компонент вектора состояний ввиду того, что за бесконечное время схождения оценок к истинным координатам вектора состояний изображающая точка системы может выйти из допустимой зоны. В то же время, в случае сходимости наблюдателя за конечное время (которое можно оценить сверху) при некоторых необременительных ограничениях на динамику объекта управления можно проводить анализ и синтез наблюдателя и системы управления независимо.

Теория асимптотических наблюдателей, развиваемая с начала 60-х годов прошлого столетия сначала к линейным [1, 18, 40, 66], а позже и к нелинейным [62] системам, находит в настоящее время широкое применение и на практике. Отметим здесь три преимущества использования асимптотических наблюдателей. Во-первых, возможность восстановить недоступные для измерения переменные позволяет исключить установку дополнительных датчиков, что может способствовать улучшению эксплуатационных и стоимостных характеристик систем управления. Во-вторых, установка физических датчиков требует учета в модели объекта управления дополнительной динамики самих датчиков, что может вызвать проблемы синтеза обратной связи в связи с чрезмерным ростом порядка модели объекта управления. В-третьих, структура асимптотического наблюдателя состояния для линейных систем совпадает со структурой фильтра Калмана [18], что позволяет осуществить фильтрацию (в том числе и оптимальную) выходных переменных при наличии шумов в каналах измерения. Учитывая, что, как правило, сигналы физических датчиков содержат шумы, вопросы фильтрации (без использования асимптотических наблюдателей) все равно приходится рассматривать. Таким образом, устройства наблюдения выполняют в системах управления двойную функцию – с одной стороны, с их помощью получают информацию о векторе состояния и параметрах объекта управления, с другой – они являются фильтрующими элементами, что существенно при наличии шумов в каналах измерений и управлений. Для терминологической точности определим термин *фильтр* как устройство для фильтрации сигналов, термин *наблюдатель* как устройство для получения оценок компонент вектора состояния. В данной монографии рассматриваются только вопросы, связанные с наблюдаемостью систем и с синтезом наблюдателей состояния, тем не менее, будут даваться некоторые комментарии по вопросам фильтрации сигналов в указанном смысле.

Как известно, идея построения асимптотических наблюдателей состоит во введении в контур обратной связи динамической подсистемы (наблюдателя), структура которой совпадает с моделью объекта управления. Задача наблюдения состоит в «подгонке» вектора состояния наблюдателя к текущим значениям вектора состояния объекта управления с использованием доступных для измерения выходных переменных объекта управления. Существенно, что, после того, как рассогласования (невязки) по векторам состояний наблюдателя и объекта управления сойдутся в нуль, при дальнейшем функционировании системы невязки остаются равными нулю (в условиях полной определенности) и в этом смысле вопрос о темпах сходимости невязок не столь и важен на практике (например, можно ввести стартовый интервал времени для подготовки системы к работе). Тем не менее, в условиях параметрической неопределенности и при воздействии внешних неконтролируемых возмущений возникают проблемы уже в самой задаче стабилизации уравнений, записанных в невязках. Для решения этого вопроса авторами разработаны методы синтеза наблюдателей состояния в

рамках методов синтеза систем с разделяемыми движениями [5, 30, 45], ставшими уже классическим методом подавления внешних и параметрических возмущений.

Другая проблема синтеза асимптотических наблюдателей связана с высокой размерностью задач их синтеза, совпадающая с размерностью объекта управления с учетом экзогенной (внешней) системы. Известный подход к декомпозиции задачи синтеза наблюдателей (наблюдатель Люенбергера [66]) позволяет понизить порядок наблюдателя только на размерность вектора выходных переменных. Отметим, что фильтрующие свойства наблюдателя Люенбергера хуже, чем у наблюдателя полной размерности в связи с тем, что выходные переменные используются непосредственно в качестве оценок (не фильтруются). В целях дальнейшей декомпозиции задачи синтеза наблюдателей авторами используется блочный подход [13, 41], состоящий из двух этапов – на первом система представляется в блочной форме наблюдаемости (БФН), на втором на основе блочного представления синтезируется наблюдатель состояния независимо в каждом блоке.

С методологической точки зрения важно отметить, что процедуры приведения к блочной форме наблюдаемости позволяют не только получить удобную форму для последующего блочного синтеза, но и выявить структурные свойства наблюдаемости системы управления (в частности выделить наблюдаемое подпространство). В этом смысле, предложенная в данной монографии методика более приближена к инженерной практике, чем известные математические работы [18, 62], где задачи анализа свойств наблюдаемости и синтеза наблюдателей решаются отдельно. С практической точки зрения разделение общего движения систем управления по этапам позволяет разделить процесс вычислений на основе ЭВМ по различным временным циклам расчета, что расширяет возможности практической реализации алгоритмов управления в реальном времени в условиях ограниченности вычислительных ресурсов. В то же время нечувствительность данных алгоритмов наблюдения к параметрическим и внешним возмущениям также позволяет обойти вычислительные трудности за счет использования приближительных вычислений части оператора объекта и простоты технической реализации алгоритмов синтеза.

В данной монографии с единых позиций рассмотрены задачи наблюдения для достаточно широкого класса линейных и нелинейных систем управления при наличии внешних и параметрических возмущений. Параметрическая инвариантность обеспечивается за счет большей грубости блочного представления, в котором существенным является свойства наблюдаемости в каждом блоке (ранговые условия) в отличие от покомпонентных канонических представлений на основе алгебры Ли. Относительно внешних возмущений предполагается, как правило, лишь их ограниченность по модулю – постановка задачи, которая только и имеет смысл с использованием методов синтеза систем с разделяемыми движениями. Отметим, что задачи синтеза наблюдателей состояний при воздействии возмущений заданного класса (модельных) полагаются более простыми и сводятся к обычной постановке за счет увеличения порядка модели исходной системы.

Отметим особенности изложения и место данной работы в теории управления.

Наиболее развитой считается линейная теория управления. Применительно к линейным системам получены структурные результаты в рамках матричного и геометрического подходов, в основе которых лежат свойства управляемости и наблюдаемости. В основном синтез линейных систем осуществляется на модальном уровне (что позволяет задавать только темпы сходимости замкнутых систем) или на основе решения задачи квадратичной оптимизации, что позволяет уже каким-либо образом задавать вид переходных процессов (с известными проблемами «настройки» критерия оптимизации). Бурное развитие линейной теории управления объясняется прежде всего возможностью получения аналитического решения задач управления применительно к линейным системам общего вида. Существенным пробелом в математической теории линейного управления является само предположение о линейности модели объекта управления. На практике проблемы использования теории линейных систем связаны с физическими ограничениями на фазовые переменные и управляющие воздействия, с учетом которых предположения о линейности оператора объекта управления на-

рушаются. Посылки о некотором открытом промежутке, в котором система не выходит на ограничения (и где линейная теория справедлива), недостаточны, поскольку при синтезе линейной обратной связи нет гарантии, что изображающая точка системы в фазовом пространстве не выйдет из допустимой области. Как раз этот важный на практике вопрос, по-видимому, не имеет решения для систем общего вида и может быть решен только для конкретных систем. Указанные соображения выявляют известный разрыв между теорией и практикой управления.

В связи с этим, авторы используют более приближенный к практике подход. А именно, предполагается, что перед разработчиком ставится задача синтеза управления конкретным объектом управления, хотя и записанным в общем виде. Прodelывая определенные процедуры, описываемые в общем виде, применительно к своей задаче, разработчик выявляет структурные свойства управляемого объекта и одновременно приводит его описание к удобной форме для решения задачи синтеза. В частности, приведение к блочной форме наблюдаемости раскрывает структуру наблюдаемости объекта управления и позволяет перейти непосредственно к каскадной процедуре синтеза наблюдателя состояния. С другой стороны, использование методологии блочного управления (в котором в каждом блоке координаты вектора состояний рассматриваются в качестве фиктивных управлений) позволяет на каждом шаге учитывать как фазовые ограничения, так и ограничения на истинные управления. В частности, при использовании разрывных управлений, автоматически учитываются ограничения по амплитуде при выборе амплитуд разрывного управления.

Выше выявлены локальные свойства линейной теории, навязываемые практикой. В случае нелинейных систем общего вида, теория управления ограничивается локальными результатами уже в силу того, что в этом случае выявить что-либо существенное о глобальных структурных свойствах управляемости и наблюдаемости для систем общего вида не представляется возможным. Действительно, классический подход к линеаризации нелинейной системы в окрестности рабочей точки заведомо является локальным, и вопрос о выходе изображающей точки замкнутой системы за окрестность линеаризации может быть решен только для конкретной системы. В рамках геометрического подхода к синтезу нелинейных систем (почти дословно повторяющем результаты линейной теории) изучены локальные структурные свойства наблюдаемости и управляемости нелинейных систем. В отличие от линеаризации в рабочей точке, геометрический подход подразумевает использование одного и того же изоморфного преобразования исходной системы для всех точек некоторой открытой области и проверки некоторых ранговых условий в этой области. И в этом случае вопрос о количественной оценке допустимой открытой области может быть решен лишь для конкретной системы. Так или иначе, решение нелинейных задач управления и наблюдения, поставленных в общем виде, сводится к преобразованию исходной системы к квазилинейному виду и последующей, полной линеаризации замкнутой системы за счет выбора управляющих воздействий. Отметим, что использование для преобразований исходной системы алгебры Ли (в задаче наблюдения это, по сути, многократное дифференцирование выходных переменных) носит избыточный характер в том смысле, что размерности получаемых функциональных матриц превышают их ранг. Наш подход к изучению нелинейных задач наблюдения в некотором смысле аналогичен подходу к синтезу линейных систем, поскольку также основан на многократном дифференцировании уравнений, описывающих выходные сигналы. В то же время разработанные пошаговые процедуры приведения к блочной форме наблюдаемости на каждом шаге учитывают структурные свойства наблюдаемости конкретной модели объекта управления, что позволяет на каждом шаге отбрасывать линейно зависимые векторы и, в результате, получить функциональные матрицы, размерности (или одна из размерностей) которых совпадают с их рангом. И в этом случае разработчик использует предлагаемые процедуры, описываемые в общем виде для «своего» объекта управления. В результате приведения к блочной нелинейной форме наблюдаемости выясняются структурные свойства наблюдаемости и одновременно система приводится к виду, удобному для блочного синтеза наблюдателя.

И, наконец, отметим, что задачи наблюдения и синтеза обратной связи часто не могут рассматриваться независимо друг от друга. В частности, локальная природа свойств наблюдаемости и управляемости нелинейных систем приводит к следующей проблеме. Предположим, что выявлена открытая область управляемости. В условиях неполной информации строится асимптотический наблюдатель и формируется обратная связь по переменным наблюдателя. Возникает следующий, достаточно сложный вопрос: учитывая асимптотический характер схождения наблюдателя состояния к объекту управления – выйдет ли изображающая точка системы из заданной области управляемости или нет? Куда более просто этот вопрос решается при использовании наблюдателя состояний с разрывными корректирующими воздействиями, в котором сходимостью обеспечивается за конечное время. Формируя корректирующие воздействия для уменьшения верхней оценки времени сходимости наблюдателя состояния, можно получить верхнюю количественную оценку ухода изображающей точки из заданной точки и, следовательно, обеспечить ее расположение в заданной области управляемости за конечное время схождения наблюдателя.

Другая проблема связана с независимостью свойств наблюдаемости и управляемости. На практике это приводит к тому, что различные формы управляемости и наблюдаемости записываются в разных координатах, что усложняет алгоритмы управления за счет необходимости обратных преобразований. Кроме того, в случае параметрической неопределенности переход от исходного описания объекта управления к координатам наблюдения управления может быть не определен. Именно поэтому вопросы наблюдаемости при параметрической неопределенности в теории управления изучены недостаточно.

Путь решения задачи наблюдения при параметрической неопределенности, предлагаемый авторами, заключается в следующем. Будем рассматривать задачу наблюдения и управления совместно, преобразовывая исходную систему к совместной форме управляемости (относительно выхода системы) и наблюдаемости. В этом случае задачи синтеза обратной связи и наблюдателя решаются в одних и тех же координатах, что снимает вопрос преобразования координат наблюдаемости в координаты управляемости и наоборот.

Монография организована следующим образом. В главе 1 дается краткий обзор состояния проблемы. Приводятся известные результаты по теории асимптотических наблюдателей состояния, анализируются возможности и «узкие места», ограничения на класс наблюдаемых систем. Даются новые постановки задач, которые не рассматривались в рамках классической теории и требуют специальных приемов их решения.

Дальнейший материал разделен на три части, в которых в рамках каскадного подхода решаются задачи наблюдения применительно к линейным и нелинейным системам общего вида, рассмотрен ряд прикладных задач.

Предлагаемый в книге каскадный подход к синтезу наблюдателей состояния, с методологической точки зрения состоит из двух этапов. На первом этапе (этап конструктивного анализа) исходная модель объекта управления преобразуется к блочно наблюдаемой форме, а именно расщепляется на блоки, размерности которых соответствуют индексам наблюдаемости системы, что позволяет непосредственно выделить наблюдаемое подпространство вектора состояния. На втором этапе (этап каскадного синтеза) на основе полученной формы строится блочный наблюдатель, в каждом блоке которого последовательно решаются элементарные подзадачи синтеза. Разработаны алгоритмы по комплексному информационному обеспечению системы управления, которые позволяют существенно сократить объем априорной информации об операторе объекта управления и среде его функционирования. В каждой главе применительно к определенному типу динамической системы приводятся:

- постановка задачи,
- методика изучения структурных свойств наблюдаемости на основе приведения к блочной форме наблюдаемости,
- процедуры каскадного синтеза наблюдателя состояния с корректирующими воздействиями в различных классах функций,
- рекомендации разработчику.

В *первой части* книги в рамках каскадного подхода решаются задачи наблюдения для линейных динамических систем в различных предположениях о неопределенности оператора объекта управления и среды его функционирования.

В главе 2 рассматриваются задачи наблюдения применительно к линейным многомерным системам управления. Разработана процедура приведения к блочной форме наблюдаемости, позволяющая выявить структурные свойства наблюдаемости объекта управления. С использованием полученной БФН разработан каскадный синтез наблюдающих устройств, позволяющий декомпозировать процедуру синтеза наблюдателя на независимо решаемые подзадачи меньшей размерности, в частности, при использовании разрывных корректирующих воздействий удастся решить задачу наблюдения за теоретически конечное время. Существенен тот факт, что декомпозицию синтеза наблюдателя удастся сохранить не только в рамках методов систем с разделяемыми движениями, но и при выборе корректирующих воздействий в виде линейных функций с конечными коэффициентами. По ходу изложения обсуждаются рамки допустимой параметрической неопределенности оператора объекта управления, демонстрируются возможности приведенных алгоритмов по обеспечению инвариантности.

В главе 3 решается важная с практической точки зрения задача наблюдения линейных систем при наличии внешних неконтролируемых возмущений, класс которых расширен по сравнению с известными постановками за счет негладких, ограниченных функций времени. Разработана процедура приведения исходной модели к блочной форме наблюдаемости с учетом возмущений, сформулированы ранговые условия разрешимости задачи. Показано, что построение блочного наблюдателя на скользящих режимах позволяет решить не только задачу оценивания компонент вектора состояния, но и восстановить линейные комбинации внешних возмущений.

Во *второй части* монографии идеи каскадного синтеза линейных наблюдателей переносятся на широкий класс нелинейных систем. Естественно, в теории результаты носят локальный характер – глобальные результаты могут быть получены только в конкретных практических задачах. В главе 4 рассматриваются проблемы наблюдения нелинейных многомерных систем, в том числе при наличии функциональных неопределенностей различного типа. В главе 5 предлагаются каскадные методы синтеза наблюдателя для нелинейных систем при аддитивном вхождении внешних неконтролируемых возмущений.

В *третьей части* на основе разработанной теории решается ряд прикладных задач для конкретных объектов управления с учетом их особенностей. В главе 6 решается задача наблюдения для асинхронного электропривода без датчика на валу, нелинейная модель которого приводится к блочно наблюдаемой форме. На примере полученного блочного представления проиллюстрированы все типы каскадных процедур синтеза наблюдателей состояния, разработанных в главе 4 для нелинейных систем общего вида. В главе 7 в качестве объекта управления рассматривается манипуляционный робот с учетом динамики электроприводов, для которого совместно решаются задачи управления (слежения за заданными траекториями) и наблюдения. В главе 8 на инженерном уровне разработан целый ряд алгоритмов блочного синтеза линейных систем при релейных измерениях. В качестве объекта управления рассматриваются модели топливо- и воздухоподдачи двигателей внутреннего сгорания.

Монография предназначена для специалистов в области теории и практики автоматического управления. Авторы, по возможности, ограничились только содержательными ссылками, как правило, доступными российскому читателю, и приносят свои извинения за далеко не полный список литературы.

Глава 1. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ НАБЛЮДАТЕЛИ СОСТОЯНИЯ. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Для формирования обратной связи в системах автоматического управления требуется информация о векторе состояния объекта управления. В случае, когда все переменные состояния доступны для измерения, для управляемой системы можно выбрать обратную связь, обеспечивающую желаемые динамические свойства замкнутой системы. На практике обычно измеряемыми (выходными) переменными объекта являются лишь отдельные компоненты вектора состояния или линейные комбинации этих компонент (либо потому, что число измерительных устройств ограничено, либо потому, что часть переменных состояний в принципе нельзя измерить). Установка дополнительных датчиков, с одной стороны, приводит к увеличению стоимости системы, а, с другой стороны, измерительные устройства вносят в систему управления лишнюю динамику, что усложняет синтез системы управления. Таким образом, возникает необходимость в решении задачи наблюдения, а именно задачи получения текущей информации о векторе состояния динамических систем по измеряемым переменным.

Задача наблюдения, являющаяся фундаментальной задачей теории автоматического управления, решается на основе теории асимптотических наблюдателей состояния. Во многих случаях только после решения задачи наблюдения можно приступить к решению задачи управления, а именно, к синтезу обратной связи. Классическая теория асимптотических наблюдателей состояния, начиная с 60-х годов прошлого столетия, связанная с именами Р. Калмана [18], Д. Люенбергера [66], У. Уонема [40], А. Исидори [62], хорошо развита в основном применительно к линейным или квазилинейным моделям объектов управления. В данной главе приводятся основные положения классической теории асимптотических наблюдателей состояния. Отмечены трудности, возникающие при практической реализации асимптотических наблюдателей состояния. Обосновывается необходимость развития классической теории (в целях расширения класса наблюдаемых систем) и разработки робастных алгоритмов наблюдения, а также более простых в реализации.

1.1. Асимптотический наблюдатель состояния полного порядка

Рассмотрим задачу восстановления текущих значений компонент вектора состояния системы по измеряемым переменным применительно к линейным многосвязным стационарным системам следующего вида:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Dx, \quad (1.1)$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния; $u \in R^p$ – вектор управления; $y \in R^m$ – вектор выходных (изменяемых) переменных; A, B, D – матрицы с постоянными коэффициентами соответствующих размерностей. Без потери общности будем полагать, что $\text{rank} D = m$.

Обратим внимание на дуальность задач управления и наблюдения: если пара $\{D, A\}$ – наблюдаемая, то пара $\{A^T, D^T\}$ – управляемая и, наоборот, если пара $\{A, B\}$ – управляемая, то пара $\{B^T, A^T\}$ – наблюдаемая. Свойство дуальности управления и наблюдения можно нестрого сформулировать следующим образом: мы считаем систему управляемой, если с помощью подходящего выбора входных воздействий ее можно перевести в любое состояние, и наблюдаемой, если можно определить ее состояние, подходящим образом обрабатывая ее входы и выходы.

Учитывая свойство дуальности, можно непосредственно использовать только понятие управляемости для построения динамических устройств наблюдения и наоборот. Во многом выбор подходов к синтезу обратной связи или наблюдателей дело вкуса и предпочтений разработчика. Существенным здесь является тот факт, что задача стабилизации в полной мере решается по всем компонентам вектора состояний с помощью управлений меньшей размерности p , а задача наблюдения – с полным управлением размерности n , но с использованием только выходных переменных размерности m .

Прежде чем переходить к конкретным способам оценивания, обсудим принципиальную возможность восстановления текущих значений неизмеряемых компонент вектора состояния по выходу.

Определение 1.1 (на физическом уровне). Система (1.1) называется *ненаблюдаемой*, если разным траекториям могут отвечать одинаковые выходы, т.е. найдутся такие начальные условия $x_0 \neq x'_0$, что для соответствующих траекторий x, x' и выходов y, y' справедливо $y \equiv y'$. В противном случае система называется *наблюдаемой*.

Определение 1.2 (в терминах геометрического подхода [40]). Пара отображений $\{D, A\}$ называется наблюдаемой, если $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(DA^{i-1}) = 0$.

Ранговые условия наблюдаемости для линейных стационарных систем, полученные Р. Калманом [18], сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1.1. Система (1.1) наблюдаема или пара $\{D, A\}$ наблюдаема тогда и только тогда, когда выполняется условие:

$$H = \begin{pmatrix} D \\ DA \\ \vdots \\ DA^{n-1} \end{pmatrix}, \text{rank} H = n. \quad (1.2)$$

Таким образом, матрица наблюдаемости H размерности $mn \times n$ должна быть полного ранга. Выполнение данного условия, по сути, означает, что вектор состояния можно оценить по значениям производных выхода до $(n-1)$ -го порядка. На практике для решения задачи оценивания используют другой подход, основанный на построении наблюдателя, и не требующий непосредственного вычисления производных.

Идея построения асимптотических наблюдателей состоит в построении динамической модели объекта управления (1.1) и последующей «подгонке» начальных условий с помощью корректирующих воздействий наблюдателя [18]:

$$\dot{z} = Az + Bu + L(y - Dz), \quad (1.3)$$

где $z \in R^n$ – вектор состояния наблюдателя; $L \in R^{n \times m}$ – матрица коэффициентов перед корректирующими воздействиями, которые подлежат определению.

Задача оценивания (наблюдения) вектора состояния сводится к задаче стабилизации системы уравнений, записанных с учетом (1.1), (1.3) относительно невязок $\varepsilon = x - z$, $\varepsilon \in R^n$:

$$\dot{\varepsilon} = (A - LD)\varepsilon. \quad (1.4)$$

В предположении о наблюдаемости пары $\{D, A\}$, выбором коэффициентов матрицы L можно обеспечить желаемое распределение корней характеристического многочлена $(A - LD)$ и, следовательно, обеспечить асимптотическую сходимость невязки (1.4) с заданными темпами $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$ или сходимость вектора состояния наблюдателя к вектору состояния объекта управления $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = x(t)$.

Отметим, что для устойчивых систем ($\operatorname{Re} \lambda_i(A) < 0, i = \overline{1, n}$) асимптотическая сходимость невязок $\dot{\varepsilon} = A\varepsilon, \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$ обеспечивается наблюдателем $\dot{z} = Az$ без корректирующих воздействий. Это тривиальный случай (поскольку при $L \equiv 0$ нет возможности влиять на темпы сходимости невязок, и время оценивания может оказаться неприемлемо большим), к которому, однако, прибегают при отсутствии измерений. Здесь уместно прокомментировать свойство детектируемости [40]. С помощью неособой замены переменных представим систему (1.1) в канонической форме наблюдаемости [19]

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1, \quad \dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2, \quad y_1 = D_1x_1,$$

где пара матриц $\{D_1, A_{11}\}$ – наблюдаемая, векторы $x_1 \in R^m$ и $x_2 \in R^{n-m}$ описывают наблюдаемую и ненаблюдаемую подсистемы, соответственно. В случае если собственные числа матрицы A_{22} имеют отрицательные действительные части, система называется *детектируемой*. При этом темпы сходимости оценок компонент наблюдаемого подпространства могут назначаться произвольно, в то время как поведение компонент ненаблюдаемого подпространства определяется матрицей их собственных движений.

Опишем процедуру синтеза обратной связи при неполной информации о состоянии системы. Предполагается, что в системе (1.1) пара $\{A, B\}$ – управляема. Наблюдаются выходные сигналы $y = Dx$, пара $\{D, A\}$ – наблюдаема. Для синтеза замкнутой системы с желаемым расположением корней характеристического уравнения требуется выполнить следующие действия:

1) синтезировать управление в предположении, что все компоненты вектора состояния известны, например, в виде линейной обратной связи $u = Fx$, $F \in R^{p \times n}$ исходя из требований к поведению замкнутой системы $\dot{x} = (A + BF)x$;

2) построить наблюдатель (1.3) с заданными темпами сходимости уравнений относительно невязок (1.4);

3) сформировать управление u в виде $u = Fz = F(x - \varepsilon)$.

После замыкания обратной связи поведение объекта управления описывается уравнениями вида $\dot{x} = (A + BF)x - BF\varepsilon$. Невязки ε сходятся к нулю независимо от вектора x и, следовательно, переходные процессы в замкнутой системе отличаются от поведения системы, синтезированной с использованием полной информации о векторе x с точностью до затухающих невязок. Понятно, что чем быстрее сходятся невязки, тем это отличие меньше. Приведенные соображения позволяют рассматривать независимо задачи синтеза обратной связи и наблюдателя.

Структурная схема замкнутой системы (1.1) с наблюдателем (1.3) представлена на рис. 1.1.

В качестве рекомендаций пользователям отметим, что в детерминированной постановке требования к темпам сходимости наблюдателя состояния могут оказаться несущественными, если учесть, что после отработки рассогласования наблюдатель в последующем дает удовлетво-

рительные оценки вектора состояний объекта управления. Чтобы повысить быстродействие и/или для повышения точности оценки в условиях параметрической неопределенности и при воздействии внешних неконтролируемых возмущений необходимо увеличивать коэффициенты корректирующих воздействий наблюдателя. Учитывая, что структура наблюдателя (1.3) совпадает со структурой фильтра Калмана, корректирующие воздействия наблюдателя можно выбрать оптимальным образом при наличии шумов в каналах измерения [4, 6, 16, 19]. При этом темпы сходимости могут оказаться неудовлетворительными. В конкретных задачах приходится искать компромисс между фильтрующими свойствами наблюдателя (фильтра) и возможностью получить оценки с удовлетворительными темпами сходимости. Другой проблемой синтеза наблюдателя состояний может оказаться его высокая размерность и связанные с этим проблемы его настройки в практических приложениях. Возможность понижения порядка наблюдателей рассматривается в следующем разделе.

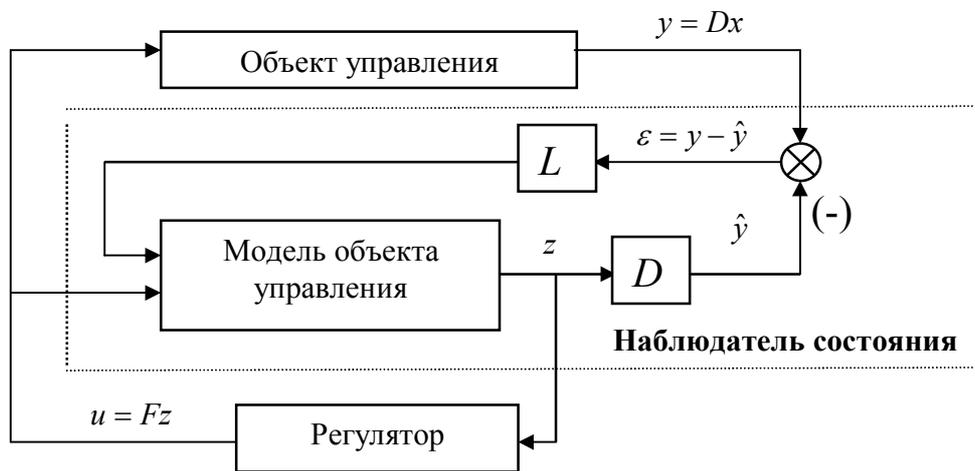


Рис.1.1. Замкнутая система с наблюдателем состояния

1.2. Наблюдатель Люенбергера

В разделе 1.1 задача восстановления вектора x системы (1.1) решалась с помощью наблюдателя (1.3) n -го порядка. Возможность понижения порядка наблюдателя состояния связана с тем фактом, что вектор выходных переменных доступен для измерения и с точки зрения задачи наблюдения не требуется повторно получать его оценки.

Действительно, представим вектор выходных переменных (предположив без ограничения общности, что $\text{rank} D = m$) в виде

$$y = D_1 x_1 + D_2 x_2, \quad (1.5)$$

где $x_1 \in R^{n-m}$, $x_2 \in R^m$, $D_1 \in R^{m \times (n-m)}$, $D_2 \in R^{m \times m}$ и $\det D_2 \neq 0$. Непосредственно из выражения (1.5) следует, что нет необходимости в определении всего вектора состояния x , так как достаточно определить лишь вектор x_1 , а вектор x_2 вычислить из соотношения

$$x_2 = D_2^{-1}(y - D_1 x_1). \quad (1.6)$$

Для определения $(n - m)$ компонент вектора x_1 можно воспользоваться асимптотическим наблюдателем Люенбергера [1, 66]. Приведем принцип построения такого наблюдателя.

Представим систему (1.1) в виде двух подсистем

$$\dot{y} = A_{21}x_1 + A_{22}y + B_2u, \quad \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}y + B_1u \quad (1.7)$$

и введем неособую замену переменных $x_1^* = x_1 + L_1y$, $x_1^* \in R^{n-m}$, где матрицу $L_1 \in R^{(n-m) \times m}$ определим позднее. Тогда вторая подсистема системы (1.7) примет вид

$$\dot{x}_1^* = (A_{11} + L_1A_{21})x_1^* + Py + (B_1 + L_1B_2)u,$$

где $P = -(A_{11} + LA_{21})L_1 + A_{12} + L_1A_{22}$. Построим наблюдатель состояния в виде

$$\dot{z}_1^* = (A_{11} + L_1A_{21})z_1^* + Py + (B_1 + L_1B_2)u, \quad (1.8)$$

где вектор $z_1^* \in R^{n-m}$ является оценкой вектора x_1^* . Уравнение относительно невязок $\varepsilon_1^* = x_1^* - z_1^*$, $\varepsilon_1^* \in R^{n-m}$ имеет вид

$$\dot{\varepsilon}_1^* = (A_{11} + L_1A_{21})\varepsilon_1^*. \quad (1.9)$$

Теперь уже в системе пониженного порядка (1.9) размерности $(n - m)$ можно задать произвольные темпы сходимости за счет соответствующего выбора коэффициентов матрицы L_1 . Отметим, что из наблюдаемости исходной системы (пара матриц $\{D, A\}$ – наблюдаемая) следует наблюдаемость пары матриц $\{A_{21}, A_{11}\}$ в системе (1.7). Этот очевидный результат легко доказывается от противного – в случае ненаблюдаемости пары $\{A_{21}, A_{11}\}$ во второй подсистеме (1.7) можно выделить ненаблюдаемое подпространство, что противоречит условию наблюдаемости относительно исходной системы.

Отметим, что при наличии в каналах измерений шумов наблюдатель Люенбергера (в отличие от наблюдателя полного порядка) не позволяет отфильтровать часть компонент вектора состояний, поскольку компоненты x_2 связаны с выходом системы алгебраическим преобразованием (1.6).

1.3. Асимптотические наблюдатели при параметрической неопределенности

До сих пор рассматривалась постановка задачи наблюдения в условиях полной определенности относительно оператора объекта управления. В реальных задачах управления приходится учитывать как параметрическую неопределенность оператора объекта управления, так и наличие внешних возмущений. Следует отметить, что вопрос синтеза наблюдателей в условиях параметрической неопределенности модели объекта управления в настоящее время изучен недостаточно.

Линейные системы при малых вариациях параметров инвариантны в смысле сохранения устойчивости согласно известной теореме о возмущениях. Этот качественный результат носит асимптотический характер, и в конкретных системах требуется решить часто довольно сложную задачу – получить количественные оценки малости вариаций параметров. В задаче наблюдения, к сожалению, такой анализ не позволяет декомпозировать решение общей задачи управления на независимые подзадачи синтеза обратной связи и наблюдателя. Действительно, рассмотрим систему (1.1) с учетом параметрической неопределенности

$$\dot{x} = (A + \bar{A})x + (B + \bar{B})u, \quad y = (D + \bar{D})x, \quad (1.10)$$

где матрицы с постоянными коэффициентами \bar{A} , \bar{B} , \bar{D} не известны. Пусть в задаче синтеза обратной связи по полным измерениям выбрано управление в виде $u = Fx$. Тогда замкнутая система описывается уравнениями вида $\dot{x} = (A + BF)x + (\bar{A} + \bar{B}F)x$. В случае, когда известны границы изменения неопределенных параметров, для анализа устойчивости можно воспользоваться, например, известными результатами интервальной устойчивости [34].

Использование стандартной процедуры синтеза задачи управления при неполных измерениях с введением наблюдателя (1.3) и обратной связью $u = Fz = F(x - \varepsilon)$ применительно к системе (1.10) приведет к замкнутой системе вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + BF)x + (\bar{A} + \bar{B}F)x - (B + \bar{B})F\varepsilon, \\ \dot{\varepsilon} &= (A - LD)\varepsilon - \bar{B}F\varepsilon + (\bar{A} + \bar{B}F - L\bar{D})x. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Как видим, уравнения относительно невязок зависят не только от собственных возмущений, но и от переменных вектора состояния объекта управления и анализ устойчивости приходится проводить относительно всей системы (1.11) удвоенной размерности по сравнению с исходной системой.

Результаты анализа на свойство сохранения устойчивости параметрически неопределенной системы (1.11) часто оказываются недостаточными даже в случае инвариантности свойств устойчивости, поскольку темпы сходимости, оцениваемые по худшему варианту, могут быть неудовлетворительными. В этом случае возникает задача уточнения параметров при формировании модели объекта управления или, если первое затруднительно или не возможно, требуется получать прямые или косвенные оценки параметров в реальном времени за счет использования алгоритмов адаптивного управления или метода расширения пространства состояний. В последнем случае уравнение модели объекта управления (1.1) дополняется матричными дифференциальными уравнениями (в предположении о постоянстве вариаций параметров) вида $\dot{\bar{A}} = 0$, $\dot{\bar{B}} = 0$, $\dot{\bar{D}} = 0$.

Один из эффективных подходов к решению задачи оценивания неопределенных параметров предложен в работе [46] с использованием теории скользящих режимов. Суть этого подхода применительно к системе (1.10) в предположении, что весь вектор состояний доступен для измерения и неизвестные параметры постоянны, а именно

$$\dot{x} = (A + \bar{A})x + (B + \bar{B})u, \quad \dot{\bar{A}} = 0, \quad \dot{\bar{B}} = 0, \quad (1.12)$$

состоит в следующем. Построим наблюдатель (идентификатор) системы (1.12) в виде

$$\dot{\bar{x}} = (A + \hat{A})x + (B + \hat{B})u + v, \quad \dot{\hat{A}} = \lambda vx^T, \quad \dot{\hat{B}} = \lambda vu^T, \quad (1.13)$$

где вектор \bar{x} и матрицы \hat{A} , \hat{B} будут служить оценками вектора состояний и неизвестных матриц, соответственно, $\lambda > 0$ – положительная константа, а корректирующие воздействия v определим позже. Запишем системы (1.12) и (1.13) относительно невязок $\varepsilon = x - \bar{x}$, $\Delta A = \bar{A} - \hat{A}$, $\Delta B = \bar{B} - \hat{B}$:

$$\dot{\varepsilon} = \Delta A x + \Delta B u - v, \quad \Delta \dot{A} = -\lambda vx^T, \quad \Delta \dot{B} = -\lambda vu^T. \quad (1.14)$$

С помощью выбора корректирующих воздействий в виде разрывных функций $v = M(x)\text{sign}\varepsilon$ организуем в первой подсистеме (1.14) скользящий режим по плоскости скольжения $\varepsilon = 0$. Тогда согласно методу эквивалентного управления [45, 48] имеем $v_{\text{eq}} = \Delta A x + \Delta B u$, и после подстановки его во второе и третье уравнения системы (1.14) получим

$$\Delta \dot{A} = -\lambda(\Delta A x + \Delta B u)x^T, \quad \Delta \dot{B} = -\lambda(\Delta A x + \Delta B u)u^T. \quad (1.15)$$

Следующий анализ при некоторых предположениях доказывает сходимость в ноль системы (1.14). В обозначениях $\bar{z} = \text{col}(x, u)$, $\Delta C = (\Delta A, \Delta B)$, учитывая, что $v_{\text{eq}} = \Delta C \bar{z}$, составим функцию Ляпунова в виде $V = \frac{1}{2} \text{tr}(\Delta C \Delta C^T) \geq 0$ и вычислим производную по времени на траекториях системы (1.15): $\dot{V} = -\lambda \text{tr}(\Delta C \bar{z} \bar{z}^T \Delta C^T) = -\lambda \|\bar{w}\|^2$, $\bar{w} = \Delta C \bar{z}$. В предположении, что компоненты вектора \bar{z} линейно независимы, функция $\dot{V} \leq 0$ является монотонно убывающей. Кроме того, если положить, что для любого $\Delta C = \text{const}$ несобственный интеграл $\int_0^{\infty} \|\bar{w}\|^2 dt$ расходится, то выполняются соотношения $\lim_{t \rightarrow \infty} V = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta C = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta A = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta B = 0$, что и означает сходимость оценок \hat{A} , \hat{B} к значениям параметров матриц \bar{A} , \bar{B} .

Очевидно, что непосредственно использовать эти результаты для идентификации систем вида (1.10) в предположении, что доступны для измерения только выходные переменные, не представляется возможным. Более того, в указанной постановке, по-видимому, невозможно восстановить все параметры модели объекта управления. Один из путей решения задачи стабилизации системы (1.10) состоит в приведении исходной системы к совместной форме управляемости и наблюдаемости (см. раздел 2.6) за счет расширения пространства состояний.

1.4. Асимптотические наблюдатели при наличии внешних возмущений

В случае воздействия на систему управления внешних неконтролируемых возмущений задача наблюдения решается в полной мере только применительно к заданному классу возмущений, а именно, при наличии внешних возмущений, поведение которых описывается известной динамической моделью [1, 28, 63, 74].

Рассмотрим систему (1.1) при воздействии внешних возмущений

$$\dot{x} = Ax + Bu + Q\eta(t), \quad y = Dx, \quad (1.16)$$

где $\eta(t) \in R^q$ – вектор внешних возмущений, A, B, Q – известные матрицы соответствующих размерностей. Предполагается, что возмущение не доступно для измерения и порождается линейной, однородной системой дифференциальных уравнений вида

$$\dot{\eta} = W\eta \quad (1.17)$$

с известными постоянными коэффициентами W и неизвестными начальными условиями.

Теория асимптотических наблюдателей позволяет за счет расширения пространства состояний системы (1.16) с учетом экзогенной системы (1.17) при определенных условиях решить задачу получения оценок как вектора состояния, так и вектора возмущений.

Запишем систему (1.16)–(1.17) относительно новых переменных $\bar{x} = \text{col}(x, \eta)$, $\bar{x} \in R^{n+q}$

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u, \quad \bar{y} = \bar{D}\bar{x}, \quad (1.18)$$

где матрицы $\bar{B} \in R^{(n+q) \times p}$, $\bar{D} \in R^{m \times (n+q)}$, $\bar{A} \in R^{(n+q) \times (n+q)}$ имеют блочную структуру

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & Q \\ 0 & W \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{D} = (D \quad 0).$$

Если окажется, что пара $\{\bar{D}, \bar{A}\}$ наблюдаема, то далее синтез асимптотического наблюдателя осуществляется по описанной выше процедуре:

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u + L(\bar{y} - \bar{D}z), \quad (1.19)$$

где $z \in R^{n+q}$. Матрица $L \in R^{(n+q) \times m}$ выбирается таким образом, чтобы собственные числа матрицы $(\bar{A} + L\bar{D})$ были желаемыми. Так как $\lim_{t \rightarrow \infty} z = \bar{x}$, то с помощью наблюдателя (1.19) одновременно определяются все компоненты расширенного вектора \bar{x} .

Характерно, что из естественных предположениях о наблюдаемости пар матриц $\{D, A\}$ и $\{Q, W\}$ в общем случае не следует наблюдаемость пары $\{\bar{D}, \bar{A}\}$ в расширенной системе (1.18). Следующий пример поясняет эту ситуацию.

Пример 1.1.

Объект управления: $\dot{x}_1 = x_2 + a\eta$, $\dot{x}_2 = u$, $\dot{\eta} = 0$, $y = x_1$.

Наблюдатель: $\dot{z}_1 = z_2 + az_3 + l_1\varepsilon_1$, $\dot{z}_2 = u + l_2\varepsilon_1$, $\dot{z}_3 = l_3\varepsilon_1$.

Уравнения в невязках: $\dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2 + a\varepsilon_3 - l_1\varepsilon_1$, $\dot{\varepsilon}_2 = -l_2\varepsilon_1$, $\dot{\varepsilon}_3 = -l_3\varepsilon_1$, где $\varepsilon_1 = x_1 - z_1$, $\varepsilon_2 = x_2 - z_2$, $\varepsilon_3 = \eta - z_3$. Характеристический многочлен матрицы в уравнениях относительно невязок $\lambda^3 + l_1\lambda^2 + (l_2 + al_3)\lambda = 0$ при любом выборе корректирующих воздействий наблюдателя содержит хотя бы один нулевой корень, что с технической точки зрения означает неустойчивость уравнений в невязках. С физической точки зрения полученный результат означает, что вторую компоненту вектора состояний удастся восстановить с точностью до постоянной составляющей или, иными словами, не удастся разделить сумму второй компоненты и возмущения.

Вопросы синтеза наблюдателей состояний при наличии произвольных внешних неконтролируемых возмущений [54] в настоящее время мало изучены в теории управления. Чтобы подчеркнуть важность решения задачи инвариантного наблюдения, выделим несколько практических постановок задач.

Как указывалось выше, в случае параметрической неопределенности (1.10) не удастся компенсировать воздействия управлений в уравнениях, записанных в невязках (1.11). При воздействии на объект управления произвольных внешних возмущений (кроме задачи инвариантного наблюдения состояния) возникает также и проблема получения оценок самих возмущений, необходимых для синтеза обратной связи. Действительно, имея оценки возмущений, можно компенсировать их по обратной связи с помощью комбинированного управления [6]. В качестве возмущений могут также рассматриваться задающие воздействия, которые, в частности, в человеко-машинных системах могут быть не гладкими.

Проблеме наблюдения динамических систем при наличии возмущений посвящается основная часть данного исследования. При этом в различных постановках рассматриваются возмущения как измеримые функции времени, ограниченные по модулю (или в норме l_∞), что представляется вполне оправданным при автоматизации технических систем.

1.5. Наблюдаемость нелинейных систем

Общей проблемой в развитии теории управления нелинейными системами является тот факт, что при записи моделей в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений общего вида предполагают, что выполнены лишь известные условия существования и единственности их решения в некотором открытом множестве изменения переменных. Естественно, что в силу большого многообразия нелинейных систем, структурных свойств управляемости и наблюдаемости сколько-нибудь полезных на практике, а также процедур синтеза обратной связи, таких как в линейных системах, выявить не удастся. Например, в предположениях об управляемости нелинейных систем существует стабилизирующее управление, но задача его синтеза может ставиться лишь для заданного класса систем [2, 15, 50, 72] в отличие от линейной теории, где для систем общего вида можно синтезировать, по крайней мере, модальное управление. По этой причине основные результаты нелинейной теории управления лежат в области отдельных классов нелинейных моделей и в прикладных нелинейных задачах.

В общей постановке основные результаты нелинейной теории управления, как правило, основываются на возможности линеаризации за счет преобразований координат и/или по обратной связи. В частности, в рамках геометрического подхода [62] (почти дословно повторяющим результаты геометрического подхода в линейных системах [40]) получены структурные результаты применительно к нелинейным системам общего вида. Во многом это стало возможным за счет локального рассмотрения задач управления и их синтеза применительно к линеаризованной модели систем.

Не умаляя значимости геометрического подхода к анализу и синтезу нелинейных задач управления, отметим, что, с одной стороны, в силу своей академичности и ряда недостатков (в частности, из-за того, что предъявляются достаточно жесткие требования к гладкости и наличию информации об операторе объекта управления, а получаемые результаты носят локальный характер) этот подход в настоящее время не находит широкого применения в инженерной практике. С другой стороны, полезность и наглядность геометрического подхода в описании структурных свойств линейных и нелинейных систем ограничивается тем, что его результаты формулируются не для исходной модели объекта управления, а к преобразованной системе с исполь-

зованием достаточно трудоемких процедур. В этом смысле предлагаемый в данной книге подход носит прагматический характер, а именно, математическая модель объекта управления сразу подвергается процедурным преобразованиям, на основе которых делается вывод о структурных свойствах управляемости и наблюдаемости, и подготавливается форма представления, удобная для решения задач синтеза.

Обобщая материал данной главы, отметим, что теория асимптотических наблюдателей состояния в настоящее время достаточно полно разработана применительно к линейным моделям объектов управления, в том числе при наличии внешних возмущений, модель которых известна. Что касается трудностей в реализации наблюдателей состояния, то они связаны с высокой размерностью задач синтеза и негрубостью к параметрическим возмущениям, в частности к неопределенностям входных каналов управления. Применительно к нелинейным системам управления полученные результаты по синтезу наблюдателей состояния обобщены в рамках геометрического подхода, который во многом повторяет схему для линейного случая и, соответственно, обладает недостатками, связанными с не конструктивностью в смысле решения задач синтеза и негрубостью получаемых результатов.

Таким образом, в рамках классического подхода в основном остается открытым вопрос о решении задачи наблюдения применительно к системам, операторы которых содержат существенные нелинейности, а также при наличии внешних неконтролируемых возмущений, модель которых неизвестна или не может быть построена. Более того, данные задачи и не могут быть решены стандартными методами в рамках классического подхода и требуют привлечения специальных методов, которые рассматриваются в следующих главах.

Часть 1. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

В первой части данной монографии излагаются оригинальные методы каскадного синтеза наблюдателей состояния, разработанные авторами применительно к многомерным линейным и нелинейным динамическим системам, в том числе при наличии внешних неконтролируемых возмущений. Первые результаты, определившие данное направление, были получены около двадцати лет назад [46], апробировались применительно к частным случаям и приложениям и, наконец, вылились в стройную теорию с единым методологическим подходом к перечисленным видам систем [13, 21–24, 29, 41–44].

Каскадным будем называть подход, который включает в себя приведение математической модели исходной системы к блочной форме наблюдаемости (БФН); построение соответствующего блочного наблюдателя состояния; использование методов систем с разделяемыми движениями (большими коэффициентами [17, 30] или разрывными управлениями [14, 45]) при синтезе корректирующих воздействий наблюдателя, позволяющих декомпозировать процедуру синтеза наблюдателей на независимые, последовательно решаемые подзадачи синтеза меньшей размерности.

Как было показано в главе 1, задача наблюдения сводится к задаче стабилизации относительно невязок, и, следовательно, преимущества систем с разделяемыми движениями сохраняются и при синтезе наблюдателей состояния. К ним относятся: 1) декомпозиция задачи синтеза на независимо решаемые подзадачи меньшей размерности; 2) обеспечение инвариантности к параметрическим неопределенностям оператора объекта управления и внешним возмущениям. Кроме того, появляется возможность иерархического выбора коэффициентов наблюдателя на основании неравенств, существенно облегчающего процедуру настройки наблюдателя, особенно в нелинейном случае. При формировании разрывных управлений задача оценивания вектора состояния решается за теоретически конечное время, а также появляется возможность получить оценки функциональных и внешних ограниченных неопределенностей.

По сравнению с классическими принципами построения асимптотических наблюдателей состояния, изложенными в главе 1, каскадный подход является новым с методологической точки зрения и состоит из двух этапов. На первом этапе (*этап конструктивного анализа*) исходная модель преобразуется к БФН, а именно расщепляется на блоки, размерности которых соответствует индексам наблюдаемости системы, что позволяет в явном виде выделить наблюдаемое подпространство и блочную структуру декомпозиции задачи синтеза. На втором этапе (*этап каскадного синтеза*) на основе полученной БФН строится блочный наблюдатель, в каждом блоке которого последовательно решаются элементарные подзадачи синтеза. Можно говорить об универсальности данного метода, который опирается на структурные свойства наблюдаемости системы, определяющие возможности оценивания и архитектуру декомпозиции задачи синтеза, которая, в свою очередь, обеспечивается привлекаемыми методами систем с разделяемыми движениями.

Наша цель состоит в стандартизации исследования структурных свойств наблюдаемости широкого класса многомерных, линейных и нелинейных систем, функционирующих в условиях неопределенности и при воздействии внешних возмущений, и разработке каскадных процедур синтеза соответствующих блочных наблюдателей состояния. Будут рассмотрены декомпозиционные алгоритмы формирования корректирующих воздействий наблюдателей в разных классах функций, с помощью которых (в зависимости от контекста задачи) обеспечивается либо асимптотическая сходимость невязок, либо сходимость за конечное время, либо с заданной точностью. Изложение особенностей каскадного подхода начнем с казалось бы хорошо изученного случая линейных систем.

Глава 2. КАСКАДНЫЙ СИНТЕЗ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим линейную стационарную динамическую систему вида

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y_1 = Dx, \quad (2.1)$$

где $x \in X \subset R^n$, $u \in R^p$, $y_1 \in Y_1 \subset R^{m_1}$ – векторы состояния, управления и выходных (измеряемых) переменных соответственно, A, B, D – известные матрицы соответствующих размерностей. Без ограничения общности предполагаем, что $\text{rank} D = m_1 < n$.

Ставится задача наблюдения неизмеряемых компонент вектора состояния системы (2.1) по измерениям y_1 с помощью динамического наблюдателя состояния. Заранее ориентируясь на предполагаемую высокую размерность системы (2.1), зададимся целью построить блочный наблюдатель, в каждом блоке которого возможно независимое решение элементарных подзадач синтеза меньшей размерности.

В следующем разделе, который содержит конструктивный анализ структурных свойств наблюдаемости системы (2.1) (или пары $\{D, A\}$), процедурно решается следующий комплекс взаимосвязанных проблем: выделение наблюдаемого подпространства вектора состояния максимально возможной размерности; выявление архитектуры блочного представления системы (2.1).

2.2. Конструктивный анализ структурных свойств наблюдаемости

Для описания структурных свойств наблюдаемости системы (2.1) вначале привлечем термины геометрического подхода [40]. Тот факт, что система (2.1) наблюдаема (см. определение 1.2 из главы 1), означает, что пространство состояния может быть отображено в *прямую сумму*:

$$X = Y_1 \oplus \dots \oplus Y_\nu, \quad Y_i = \text{Ker}^\perp(DA^{i-1}), \quad A^0 = I_{n \times n}, \quad (2.2)$$

где Y_i – A -инвариантные подпространства [40], которым соответствуют векторы $y_i \in Y_i \subset R^{m_i}$, m_i – *индексы наблюдаемости* (размерности векторов прямой суммы (2.2)) и $m_1 + m_2 + \dots + m_\nu = n$, ν – *показатель наблюдаемости* системы (2.1) (или пары $\{D, A\}$), который определяется следующим образом:

$$\nu := \min \left\{ j : 1 \leq j \leq n, \bigcap_{i=1}^j \text{Ker}(DA^{i-1}) = 0 \right\}.$$

Как нетрудно видеть, ν всегда существует и лежит в пределах $1 \leq \nu \leq n$. Если система (2.1) ненаблюдаемая, то $\sum_{i=1}^{\nu} m_i < n$ (или $\sum_{i=1}^n \text{Ker}^\perp(DA^{i-1}) \neq X$), и ненаблюдаемое подпространство имеет

размерность $(n - \sum_{i=1}^{\nu} m_i)$.

По сравнению с наблюдателем Люенбергера пониженной размерности, где, по сути, сделан только первый шаг декомпозиции (см. раздел 1.2), отображение в прямую сумму (2.2) определяет архитектуру полной *структурной* декомпозиции синтеза задачи наблюдения на подзадачи m_i -й размерности.

Для практической реализации ставится задача: получить блочное представление системы (2.1), состоящей из ν блоков, с вектором состояния $y = \text{col}(y_1, \dots, y_\nu)$, $y_i \in R^{m_i}$, которое будем называть *блочной формой наблюдаемости* (БФН) системы (2.1). Конструктивность данной постановки заключается в том, что параллельно с анализом разрешимости задачи наблюдения будет получена форма, позволяющая осуществить каскадный синтез задачи наблюдения.

Для выявления канвы неособых преобразований, приводящих к БФН, сопоставим термины геометрического подхода с ранговыми условиями наблюдаемости Калмана (1.2). Матрица наблюдаемости H (1.2) размерности $(m\nu \times n)$ формально означает многократное дифференцирование вектора выходных переменных y_1 разомкнутой системы (2.1):

$$y_1 = Dx, \quad \dot{y}_1 = DAx, \quad \ddot{y}_1 = DA^2x, \quad \dots, \quad y_1^{(n-1)} = DA^{n-1}x. \quad (2.3)$$

Индекс наблюдаемости m_i – это, по сути, число строк уравнения относительно $y_1^{(i-1)}$ в системе (2.3), правые части которых участвуют в образовании базисного минора матрицы наблюдаемости. Отсюда следует эквивалентность условий наблюдаемости:

$$(\text{rank}H = n) \sim (m_1 + m_2 + \dots + m_\nu = n),$$

а также идеология *пошаговой процедуры* получения БФН – при *формальном* дифференцировании вектора выходных переменных (наборе строчных блоков матрицы H) на каждом i -ом шаге ($i = 1, \nu - 1$) требуется выделять m_{i+1} строк ($m_{i+1} \leq m_i$), правые части которых участвуют в формировании базисного минора матрицы наблюдаемости H , и только соответствующие им компоненты выходного вектора далее дифференцировать до выполнения одного из двух условий:

$$m_1 + m_2 + \dots + m_\nu = n, \quad (*)$$

которое означает, что базисный минор максимально возможного ранга n набран, и исходная система наблюдаема, или

$$m_{i+1} = 0, \quad (**)$$

которое означает, что исходная система является ненаблюдаемой и $m_1 + m_2 + \dots + m_i < n$.

Таким образом, блоки БФН будут составлять укороченные уравнения системы (2.3), и их количество в общем случае будет меньше, чем в матрице наблюдаемости.

Для анализа структурных свойств наблюдаемости системы (2.1) и получения БФН приведем пошаговую процедуру неособых преобразований в терминах пространства состояний, соответствующих отображению (2.2).

Предварительно отметим, что обычно с термином «каноническая форма наблюдаемости» ассоциируется форма Бруновского [40], получение которой, после предварительного установления факта наблюдаемости исходной системы (2.1), связано с определением коэффициентов характеристического многочлена (для систем большой размерности – это достаточно трудоемкая задача) и требует точного знания параметров. В многомерном случае $m_1 > 1$ форма Бруновского основана на покомпонентном представлении относительно выходных координат.

Мы предлагаем принципиально другую, организованную по блочному принципу форму наблюдаемости, архитектура которой определяется индексами наблюдаемости системы (2.1) [41]. Получение данной формы связано с неособыми преобразованиями отдельных блоков меньшей размерности, чем размерность исходной системы, и не требует нахождения коэффициентов характеристического многочлена. Как будет показано ниже, данные преобразования обладают грубостью к возможной параметрической неопределенности системы (2.1). Тот необходимый минимум априорной определенности оператора объекта управления (2.1), который требуется для решения поставленной задачи, будет выявляться и оговариваться по ходу процедуры. Существенно, что анализ структурных свойств наблюдаемости системы (2.1) заложен в самой процедуре, что позволит выделить в явном виде наблюдаемое подпространство.

Процедура приведения к блочной форме наблюдаемости (БФН).

Данная процедура состоит из пошаговых однотипных преобразований.

Шаг 1. (а) Представим исходную систему (2.1) в виде двух подсистем

$$\dot{y}_1 = C_{11}y_1 + D_1x_1 + B_1u, \quad \dot{x}_1 = A_{11}y_1 + A_1x_1 + R_1u \quad (2.4)$$

с помощью неособого преобразования

$$G_1 = \begin{pmatrix} D_{01} & D_{02} \\ 0 & I_{n-m_1} \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

где $D = (D_{01} \ D_{02})$, $\det D_{01} \neq 0$, $y_1 \in R^{m_1}$, $\text{rank} G_1 = n = \dim x$, $x_1 \in R^{n-m_1}$.

(б) Пусть $\text{rank} D_1 = m_2$. Если $m_2 = 0$, то процедура заканчивается по условию (**), и вторая подсистема (2.4) относительно x_1 является ненаблюдаемой. В противном случае $m_1 \geq m_2 \neq 0$ с целью выделить строки, правые части которых участвуют в образовании базисного минора матрицы H , расщепим первое уравнение системы (2.4) на две подсистемы

$$\dot{\tilde{y}}_1 = \tilde{C}_{11}y_1 + \tilde{D}_1x_1 + \tilde{B}_1u, \quad \dot{\bar{y}}_1 = \bar{C}_{11}y_1 + \bar{D}_1x_1 + \bar{B}_1u, \quad (2.6)$$

так, чтобы $\dim \tilde{y}_1 = \text{rank} \tilde{D}_1 = \text{rank} D_1 = m_2$, $\bar{y}_1 \in R^{m_1-m_2}$.

Заметим, что в системе (2.6) строки матрицы \bar{D}_1 являются линейной комбинацией строк матрицы \tilde{D}_1 , что позволяет полностью исключить компоненты вектора x_1 из второго уравнения системы (2.6) с помощью неособого преобразования

$$G_1^* = \begin{pmatrix} I_{m_2} & 0 \\ -\bar{D}_{11}\tilde{D}_{11}^{-1} & I_{m_1-m_2} \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

где $\tilde{D}_1 = (\tilde{D}_{11} \ \tilde{D}_{12})$, $\det \tilde{D}_{11} \neq 0$, $\bar{D}_1 = (\bar{D}_{11} \ \bar{D}_{12})$. Преобразование (2.7) приводит к блочному представлению [8]

$$G_1^* D_1 = G_1^* \begin{pmatrix} \tilde{D}_{11} & \tilde{D}_{12} \\ \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{D}_{11} & \tilde{D}_{12} \\ -\bar{D}_{11}\tilde{D}_{11}^{-1}\tilde{D}_{11} + \bar{D}_{11} & -\bar{D}_{11}\tilde{D}_{11}^{-1}\tilde{D}_{12} + \bar{D}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{D}_{11} & \tilde{D}_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

поскольку является не особым и не изменяет ранговых свойств: $\text{rank} D_1 = \text{rank} G_1^* D_1 = \text{rank} \tilde{D}_{11}$. Следовательно, $\text{rank}(-\bar{D}_{11}\tilde{D}_{11}^{-1}\tilde{D}_{12} + \bar{D}_{12}) = 0$ (в противном случае $\text{rank} G_1^* D_1 > \text{rank} D_1$), т.е. данная матрица – нулевая и

$$\bar{D}_{12} = \bar{D}_{11}\tilde{D}_{11}^{-1}\tilde{D}_{12}. \quad (2.8)$$

В результате преобразования (2.7) второе уравнение системы (2.6) представимо в виде

$$\dot{y}_1^* = C_{11}^* y_1 + B_1^* u, \quad (2.9)$$

где $\dim y_1^* = \dim \bar{y}_1 = m_1 - m_2$. В последующих построениях преобразование (2.7) приводиться не будет, но в дальнейшем изложении будет учитываться соотношение (2.8).

(в) Введем обозначение

$$y_2 = \tilde{D}_1 x_1, \quad y_2 \in R^{m_2}. \quad (2.10)$$

С учетом (2.8), (2.10) система (2.6) принимает вид

$$\dot{\tilde{y}}_1 = \tilde{C}_{11} y_1 + y_2 + \tilde{B}_1 u, \quad \dot{\bar{y}}_1 = \bar{C}_{11} y_1 + \bar{C}_{12} y_2 + \bar{B}_1 u, \quad (2.11)$$

где $\bar{C}_{12} = \bar{D}_{11}\tilde{D}_{11}^{-1}$. Заметим, что с точки зрения наблюдаемости не принципиален вид второй подсистемы, записанной относительно вектора \bar{y}_1 (2.11) или y_1^* (2.9), поскольку $\text{rank}(I_{m_2} \ \bar{C}_{12})^T = \text{rank}(I_{m_2} \ 0)^T = m_2$. Отличие заключается в том, что для выполнения преобразования (2.7) требуется точно знать параметры матриц \tilde{D}_{11} , \bar{D}_{11} , в то время как в рамках каскадного синтеза на основе метода разделения движений (см. раздел 2.3) знание параметров второго уравнения системы (2.11) для нас не существенно. Более конкретно, для выполнения обратных преобразований потребуется знание параметров матрицы \tilde{D}_1 , и допустима параметрическая неопределенность (в пределах соблюдения ранговых условий) матрицы \bar{D}_1 . В дальнейшем не будем «обращать внимание» на компоненты y_2 , присутствующие во втором уравнении системы (2.11), и именно систему (2.11) будем считать первым блоком БФН.

Следует отметить, что если $m_2 = m_1$, то расщепления (2.6) не потребуется, и в качестве пер-

вого блока БФН принимается первое уравнение системы (2.4) после выполнения неособой замены $y_2 = D_1 x_1$.

Если $m_2 < \dim x_1$, то переходим ко второму шагу, на котором преобразования, аналогичные (2.5)–(2.6), применяются ко второму уравнению (2.4) с фиктивным выходом (2.9), и т.д.

Шаг i . Предположив, что на предыдущих шагах условия окончания процедуры (*) или (**) не были выполнены, переходим к i -му шагу, на котором с учетом сделанных замен переменных рассматривается подсистема

$$\dot{x}_{i-1} = \sum_{j=1}^{i-1} A_{i-1,j} y_j + A_{i-1} x_{i-1} + R_{i-1} u, \quad y_i = \tilde{D}_{i-1} x_{i-1}, \quad (2.12)$$

где $n - m_1 - \dots - m_{i-1} = \dim x_{i-1} > \dim y_i = \text{rank} \tilde{D}_{i-1} = m_i$, и вектор y_i трактуется как фиктивный выход.

(а) Представим первое уравнение (2.12) в виде двух подсистем

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^i C_{ij} y_j + D_i x_i + B_i u, \quad \dot{x}_i = \sum_{j=1}^i A_{ij} y_j + A_i x_i + R_i u \quad (2.13)$$

с помощью неособого преобразования

$$G_i = \begin{pmatrix} \tilde{D}_{i-1,1} & \tilde{D}_{i-1,2} \\ 0 & I_{n-m_1-\dots-m_i} \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

где $\tilde{D}_{i-1} = (\tilde{D}_{i-1,1} \quad \tilde{D}_{i-1,2})$, $\det \tilde{D}_{i-1,1} \neq 0$, $\text{rank} G_i = \dim x_{i-1}$, $\dim x_i = n - m_1 - \dots - m_i$.

(б) Предположив, что $\text{rank} D_i = m_{i+1} \neq 0$ и $m_i > m_{i+1}$, расщепим первое уравнение системы (2.13) на две подсистемы

$$\dot{\tilde{y}}_i = \sum_{j=1}^i \tilde{C}_{ij} y_j + \tilde{D}_i x_i + \tilde{B}_i u, \quad \dot{\bar{y}}_i = \sum_{j=1}^i \bar{C}_{ij} y_j + \bar{D}_i x_i + \bar{B}_i u \quad (2.15)$$

так, чтобы $\dim \tilde{y}_i = \text{rank} \tilde{D}_i = \text{rank} D_i = m_{i+1}$, $\dim \bar{y}_i = m_i - m_{i+1}$.

(в) Введем неособую замену переменных $y_{i+1} = \tilde{D}_i x_i$, $y_{i+1} \in R^{m_{i+1}}$ с учетом которой окончательно получен i -й блок БФН, состоящий из двух подблоков (2.15). Если $m_{i+1} < \dim x_i$, то переходим к $(i+1)$ -му шагу, на котором преобразования, аналогичные (2.14)–(2.15), применяются ко второму уравнению системы (2.13) с фиктивным выходом y_{i+1} , и т.д. до выполнения условий (*) или (**).

Данная процедура закончится за конечное число шагов в силу того, что на каждом шаге пары $\{D_i, A_i\}$ – наблюдаемые и, следовательно, размерность вектора x_{i-1} на каждом i -м шаге уменьшается на конечную величину $m_i \leq m_{i-1}$. Предложим, что $(\nu-1)$ -й шаг процедуры – по-

следний. При выполнении условия (*) $m_v = \dim x_{v-1}$ и, после неособого преобразования $G_v = \tilde{D}_{v-1}$, получим полную БФН системы (2.1), состоящую из v блоков, каждый из которых (кроме последнего) в общем случае расщеплен на два подблока

$$\dot{\tilde{y}}_i = \sum_{j=1}^i \tilde{C}_{ij} y_j + y_{i+1} + \tilde{B}_i u, \quad \dot{\bar{y}}_i = \sum_{j=1}^{i+1} \bar{C}_{ij} y_j + \bar{B}_i u, \quad i = \overline{1, v-1}; \quad \dot{y}_v = \sum_{j=1}^v C_{vj} y_j + B_v u, \quad (2.16)$$

где $y_i = \text{col}(\tilde{y}_i, \bar{y}_i)$, $\dim \tilde{y}_i = \dim y_{i+1} = m_{i+1}$, $\dim \bar{y}_i = m_i - m_{i+1}$. Поскольку в силу процедуры $\sum_{i=1}^v m_i = n$, то исходная система (2.1) наблюдаема. Следовательно, поставленную задачу оценивания не измеряемых компонент вектора состояния x можно выполнить в полной мере, получив с помощью наблюдателя состояния оценки вектора состояния системы (2.16) (см. разделы 2.3–2.4) и используя обратное преобразование координат

$$x = G_1^{-1} \left[\begin{array}{c} y_1 \\ G_2^{-1} \left[\begin{array}{c} y_2 \\ \vdots \\ G_{v-1}^{-1} \left[\begin{array}{c} y_{v-1} \\ G_v^{-1} y_v \end{array} \right] \end{array} \right] \end{array} \right], \quad (2.17)$$

которое позволяет однозначно определить вектор x , поскольку совместный ранг матриц G_i , $i = \overline{1, v}$ равен $n = \dim x$ по построению. Соответственно, параметры матриц G_i , $i = \overline{1, v}$ должны быть известны. Обратное преобразование (2.17) требуется в том случае, когда собственно задача управления (синтез обратной связи) решается в терминах пространства X .

При выполнении условия (***) $m_v = 0$ получим неполную БФН вида:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{y}}_i &= \sum_{j=1}^i \tilde{C}_{ij} y_j + y_{i+1} + \tilde{B}_i u, \quad \dot{\bar{y}}_i = \sum_{j=1}^{i+1} \bar{C}_{ij} y_j + \bar{B}_i u, \quad i = \overline{1, v-2}; \\ \dot{y}_{v-1} &= \sum_{j=1}^{v-1} C_{v-1,j} y_j + B_{v-1} u, \quad \dot{x}_{v-1} = \sum_{j=1}^{v-1} A_{v-1,j} y_j + A_{v-1} x_{v-1} + R_{v-1} u, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где наблюдаемы только компоненты $y = \text{col}(y_1, y_2, \dots, y_{v-1})$, $y_i \in R^{m_i}$ суммарной размерности $m_1 + m_2 + \dots + m_{v-1} < n$.

Выделенное в явном виде ненаблюдаемое подпространство составляют компоненты последнего уравнения системы (2.18) размерности $\dim x_{v-1} = n - m_1 - \dots - m_{v-1}$. С помощью наблюдателя состояния можно получить оценки компонент вектора y , которые представляют линейную комбинацию компонент вектора состояния x исходной системы (2.1) $y_1 = Dx$, $y_{i+1} = \tilde{D}_i x_i$,

$i = 2, \nu - 2$ ранга $m_1 + m_2 + \dots + m_{\nu-1} < n$. Поскольку из данных соотношений нельзя однозначно определить координаты исходной системы X , то ставить задачу оценивания наблюдаемого подпространства вектора состояния имеет смысл только в том случае, когда постановка задачи управления допускает решение в терминах пространства Y . Например, задача стабилизации выходных переменных при неполных измерениях, решение которой, основанное на совместном (синхронном) анализе структурных свойств наблюдаемости и управляемости, приводится в разделе 2.5.

Таким образом, к данным в главе 1 определениям наблюдаемости линейных систем (ранговым – теорема 1.1 и в терминах геометрического подхода – определение 1.2) можно добавить эквивалентное утверждение в терминах неособых преобразований (2.14).

Теорема 2.1. *Линейная система (2.1) наблюдаема тогда и только тогда, когда она приводима к полной блочной форме наблюдаемости (2.16).*

Еще раз подчеркнем, что представление модели объекта управления (2.1) в БФН (2.16) раскрывает структуру наблюдаемости (цепочку интеграторов), присущую ей с учетом имеющихся каналов измерений (см. рис. 2.1).

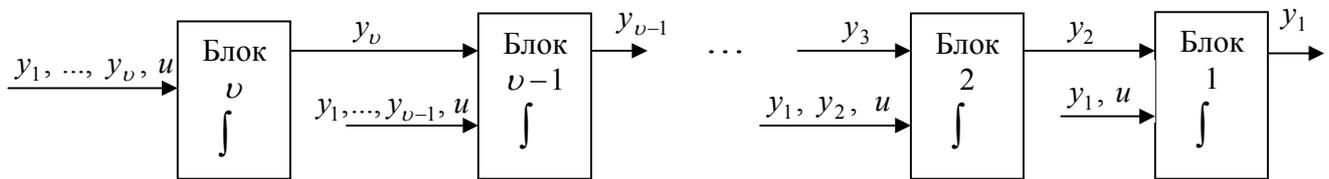


Рис. 2.1. Структурная схема системы (2.16)

Конструктивность описанной процедуры получения БФН заключается в том, что, во-первых, исключив избыточные преобразования типа (2.7), непосредственно выделяется наблюдаемое подпространство максимальной возможной размерности (в этом смысле содержание теоремы 1.1 не конструктивно), во-вторых, исходная система подготавливается к каскадному синтезу, который описывается в следующих разделах данной главы.

Рекомендации разработчику. Если исходная система является ненаблюдаемой, а для синтеза обратной связи координат наблюдаемого подпространства не достаточно, то требуются дополнительные измерения. На основе формы (2.18) можно дать некоторые рекомендации по установке дополнительных измерительных устройств: для того, чтобы весь вектор состояния системы (2.1), приведенной к виду (2.18), подлежал оцениванию, требуется так организовать дополнительные измерения $y^* = D^* x_{\nu-1}$, чтобы пара $\{D^*, A_{\nu-1}\}$ была наблюдаемой.

2.3. Каскадный синтез наблюдателей состояния на основе метода разделения движений

Рассматривая представление системы (2.1) в БФН (2.16) в качестве исходной модели объекта управления, проведем сначала каскадный синтез наблюдателя состояния с использованием методов систем с большими коэффициентами и разрывными управлениями, а затем покажем, что аналогичная декомпозиция может быть осуществлена и в рамках линейной теории с конечными коэффициентами. Выберем структуру наблюдателя состояний в соответствии с блочным представлением (2.16):

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{z}}_i &= \sum_{j=1}^i \tilde{C}_{ij} z_j + z_{i+1} + \tilde{B}_i u + \tilde{v}_i, \quad \dot{\bar{z}}_i = \sum_{j=1}^{i+1} \bar{C}_{ij} z_j + \bar{B}_i u + \bar{v}_i, \quad i = \overline{1, \nu-1}; \\ \dot{z}_\nu &= \sum_{j=1}^{\nu} C_{\nu j} z_j + B_\nu u + v_\nu,\end{aligned}\tag{2.19}$$

где $z = \text{col}(z_1, \dots, z_\nu) \in R^n$ – вектор состояния наблюдателя, $z_i = \text{col}(\tilde{z}_i, \bar{z}_i) \in R^{m_i}$, $v = \text{col}(v_1, \dots, v_\nu) \in R^n$ – вектор корректирующих воздействий наблюдателя, $v_i = \text{col}(\tilde{v}_i, \bar{v}_i) \in R^{m_i}$, которые выбираются так, чтобы решить задачу стабилизации системы уравнений относительно невязок $\varepsilon = y - z$, $\varepsilon = \text{col}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\nu) \in R^n$, $\varepsilon_i = \text{col}(\tilde{\varepsilon}_i, \bar{\varepsilon}_i) \in R^{m_i}$, записанных с учетом (2.16), (2.19) в виде

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}_i = \sum_{j=1}^i \tilde{C}_{ij} \varepsilon_j + \varepsilon_{i+1} - \tilde{v}_i, \quad \dot{\bar{\varepsilon}}_i = \sum_{j=1}^{i+1} \bar{C}_{ij} \varepsilon_j - \bar{v}_i, \quad i = \overline{1, \nu-1}; \quad \dot{\varepsilon}_\nu = \sum_{j=1}^{\nu} C_{\nu j} \varepsilon_j - v_\nu.\tag{2.20}$$

Отметим, что в каждом блоке системы (2.20) выполняется условие $\dim \varepsilon_i = \dim v_i = m_i$, $i = \overline{1, \nu}$, которое является предпосылкой решения элементарной задачи синтеза, поскольку размерность корректирующих воздействий совпадает с размерностью соответствующих блоков.

2.3.1. Каскадный синтез корректирующих воздействий в классе систем с большими коэффициентами

В предположении, что правые части системы (2.20) ограничены, сформируем корректирующие воздействия по невязке измеряемых переменных

$$\begin{aligned}\tilde{v}_1 &= \tilde{k}_1 \tilde{E}_1 \varepsilon_1, \quad \bar{v}_1 = \bar{k}_1 \bar{E}_1 \varepsilon_1; \\ \tilde{v}_i &= \tilde{k}_i \tilde{E}_i \tilde{k}_{i-1} \tilde{E}_{i-1} \dots \tilde{k}_2 \tilde{E}_2 \tilde{k}_1 \tilde{E}_1 \varepsilon_1, \quad \bar{v}_i = \bar{k}_i \bar{E}_i \bar{k}_{i-1} \bar{E}_{i-1} \dots \bar{k}_2 \bar{E}_2 \bar{k}_1 \bar{E}_1 \varepsilon_1, \quad i = \overline{2, \nu-1}; \\ v_\nu &= k_\nu \tilde{k}_{\nu-1} \tilde{E}_{\nu-1} \dots \tilde{k}_2 \tilde{E}_2 \tilde{k}_1 \tilde{E}_1 \varepsilon_1,\end{aligned}\tag{2.21}$$

где $\tilde{E}_i = (I_{m_{i+1}} \ 0)$, $\dim \tilde{E}_i = m_{i+1} \times m_i$, $\bar{E}_i = (0 \ I_{m_i - m_{i+1}})$, $\dim \bar{E}_i = (m_i - m_{i+1}) \times m_i$, $i = \overline{1, \nu-1}$, с бесконечно большими скалярными параметрами $\tilde{k}_i, \bar{k}_i \rightarrow +\infty$, $i = \overline{1, \nu-1}$; $k_\nu \rightarrow +\infty$. Последовательно рассматривая поведение переменных блоков замкнутой системы (2.20)–(2.21), получим следующие соотношения. При $\tilde{k}_1, \bar{k}_1 \rightarrow +\infty$ в уравнениях первого блока $\dot{\tilde{\varepsilon}}_1 = \tilde{C}_{11} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \tilde{k}_1 \tilde{\varepsilon}_1$, $\dot{\bar{\varepsilon}}_1 = \bar{C}_{11} \varepsilon_1 + \bar{C}_{12} \varepsilon_2 - \bar{k}_1 \bar{\varepsilon}_1$ возникнут быстрые движения, и в асимптотике обеспечивается стабилизация переменных

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_1 = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} z_1 = y_1,\tag{2.22}$$

а из соотношений статики $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\varepsilon}_1 = 0$ (которые характеризуют медленные движения и приводят к понижению динамического порядка на m_1 системы (2.20)–(2.21)) находятся эквивалентные управления

$$\tilde{v}_{1\text{eq}} = (\tilde{k}_1 \tilde{\varepsilon}_1)_{\text{eq}} = \varepsilon_2, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{v}_1 = \tilde{v}_{1\text{eq}}. \quad (2.23)$$

С учетом соотношений (2.21)–(2.23) уравнения второго блока примут вид $\dot{\tilde{\varepsilon}}_2 = \tilde{C}_{22}\varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \tilde{k}_2 \tilde{\varepsilon}_2$, $\dot{\bar{\varepsilon}}_2 = \bar{C}_{22}\varepsilon_2 + \bar{C}_{23}\varepsilon_3 - \bar{k}_2 \bar{\varepsilon}_2$, и при $\tilde{k}_2, \bar{k}_2 \rightarrow +\infty$ обеспечиваются соотношения $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_2 = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} z_2 = y_2$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\varepsilon}}_2 = 0 \Rightarrow \tilde{v}_{2\text{eq}} = (\tilde{k}_2 \tilde{\varepsilon}_2)_{\text{eq}} = \varepsilon_3$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{v}_2 = \tilde{v}_{2\text{eq}}$, и т.д. Соответственно, в i -м блоке, $i = \overline{3, \nu-1}$, в системе $\dot{\tilde{\varepsilon}}_i = \tilde{C}_{ii}\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} - \tilde{k}_i \tilde{\varepsilon}_i$, $\dot{\bar{\varepsilon}}_i = \bar{C}_{ii}\varepsilon_i + \bar{C}_{i,i+1}\varepsilon_{i+1} - \bar{k}_i \bar{\varepsilon}_i$, где $\tilde{v}_i = \tilde{k}_i \tilde{E}_i \tilde{v}_{(i-1)\text{eq}}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{v}_i = \tilde{k}_i \tilde{\varepsilon}_i$, $\bar{v}_i = \bar{k}_i \bar{E}_i \bar{v}_{(i-1)\text{eq}}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{v}_i = \bar{k}_i \bar{\varepsilon}_i$, при $\tilde{k}_i, \bar{k}_i \rightarrow +\infty$ обеспечиваются соотношения $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_i = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} z_i = y_i$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\varepsilon}}_i = 0 \Rightarrow \tilde{v}_{i\text{eq}} = (\tilde{k}_i \tilde{\varepsilon}_i)_{\text{eq}} = \varepsilon_{i+1}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{v}_i = \tilde{v}_{i\text{eq}}$ и, наконец, в последнем блоке $\dot{\varepsilon}_\nu = C_{\nu\nu}\varepsilon_\nu - k_\nu \varepsilon_\nu$ при $k_\nu \rightarrow +\infty$ обеспечится асимптотическая стабилизация переменных $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_\nu = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} z_\nu = y_\nu$.

Таким образом обеспечивается последовательная асимптотическая стабилизация переменных блоков системы (2.20)–(2.21) на основе организации разнотемповых движений, которые возникают последовательно в каждом блоке системы при больших коэффициентах усиления, что приводит к последовательному понижению динамического порядка системы (2.20) на величину m_i . Заметим, что данный принцип синтеза правомерно считать каскадным (последовательным и независимым) в асимптотическом смысле при условии, что темпы сходимости в предыдущем блоке существенно быстрее темпов сходимости в последующем блоке, т.е. коэффициенты обратной связи должны удовлетворять следующей иерархии:

$$k_1 \gg k_2 \gg k_3 \gg \dots \gg k_\nu, \quad k_\nu \rightarrow +\infty, \quad k_i = \min\{\tilde{k}_i, \bar{k}_i\}, \quad i = \overline{1, \nu-1}. \quad (2.24)$$

Настройка коэффициентов наблюдателя на основе неравенств (2.24) является, по сути, однопараметрической, если коэффициенты выбирать, например, следующим образом $k_i = (k_\nu)^{\nu-i+1}$, и имеет очевидные достоинства в условиях параметрической неопределенности оператора объекта управления. При выполнении условия (2.24) поведение переменных системы (2.20)–(2.21) можно описать следующей логической цепочкой:

$$\varepsilon_i \rightarrow 0 \Rightarrow \varepsilon_{i+1} \rightarrow 0, \quad i = \overline{1, \nu-1}. \quad (2.25)$$

Принцип формирования корректирующих воздействий (2.21) наблюдателя (2.19) представлен на рис. 2.2.

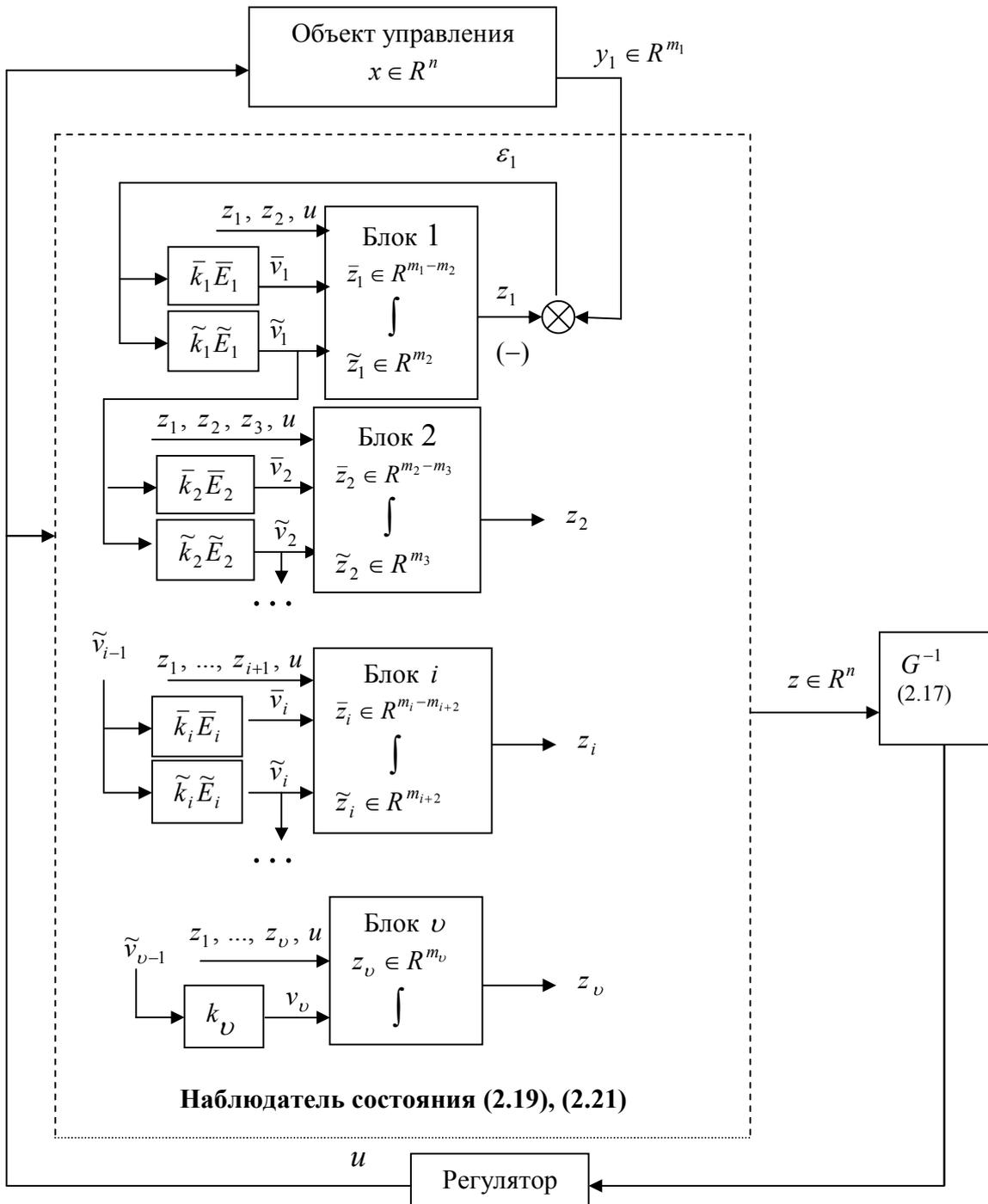


Рис. 2.2. Блочный синтез наблюдателя состояния с глубокими обратными связями

Мы намеренно не детализировали математический аспект описанного метода синтеза, поскольку каскадный асимптотический синтез задачи наблюдения с формированием глубоких обратных связей представляет интерес больше с теоретической точки зрения и непосредственно неприменим на практике. В силу ограничений вычислительной среды на практике возможна реализация конечных коэффициентов, что может привести к сходимости невязок в не нуль, а только в некоторую окрестность нуля, т.е. задача наблюдения может быть решена с некоторой точностью. Заметим, что такая постановка задачи вполне правомерна в условиях существенной неопределенности оператора объекта управления и среды его функционирования, и в дальнейшем мы будем опираться на теоретические результаты данного раздела. Как будет показано, преимущества описанного метода, связанные с декомпозицией задачи синтеза и настройкой наблюдателя на основе неравенств типа (2.24), инвариантных к параметрическим неопределенностям, сохранятся и в допредельной ситуации, при конечных коэффициентах корректирующих воздействий. Другая возможность практического применения каскадного синтеза наблюдателей связана с реализацией глубоких обратных связей посредством разрывных управлений и организации скользящих режимов. Данная проблема решается в следующем параграфе.

2.3.2. Каскадный синтез разрывных корректирующих воздействий

Сформируем теперь разрывные корректирующие воздействия наблюдателя (2.19) в виде

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1 &= \tilde{M}_1 \tilde{E}_1 \text{sign} \varepsilon_1, \quad \bar{v}_1 = \bar{M}_1 \bar{E}_1 \text{sign} \varepsilon_1; \\ \tilde{v}_i &= \tilde{M}_i \tilde{E}_i \text{sign} \tilde{v}_{(i-1)\text{eq}}, \quad \bar{v}_i = \bar{M}_i \bar{E}_i \text{sign} \tilde{v}_{(i-1)\text{eq}}, \quad i = \overline{2, \nu-1}; \quad v_\nu = M_\nu \text{sign} \tilde{v}_{(\nu-1)\text{eq}}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

где $\text{sign}(\cdot)$ – векторы соответствующей размерности (например, $\text{sign} \varepsilon_1 = \text{col}(\text{sign} \varepsilon_{1_1}, \dots, \text{sign} \varepsilon_{1_{m_1}})$), $\tilde{M}_i, \bar{M}_i, M_\nu$ – амплитуды разрывных управлений (скалярные, положительные параметры), выбор которых и составляет задачу синтеза. Эквивалентные значения разрывных управлений $\dot{\tilde{\varepsilon}}_i = 0 \Rightarrow \tilde{v}_{i\text{eq}} = (\tilde{M}_i \text{sign} \tilde{\varepsilon}_i)_{\text{eq}}, i = \overline{1, \nu-1}$, согласно методу эквивалентного управления [45], находятся из соотношений $\dot{\tilde{\varepsilon}}_i = 0$. Покажем, что задача стабилизации замкнутой системы (2.20), (2.26) сводится к независимому выбору амплитуд управляющих воздействий.

Уравнения первого блока системы (2.20) с учетом (2.26) примут вид $\dot{\tilde{\varepsilon}}_1 = \tilde{C}_{11} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \tilde{M}_1 \text{sign} \tilde{\varepsilon}_1, \dot{\bar{\varepsilon}}_1 = \bar{C}_{11} \varepsilon_1 + \bar{C}_{12} \varepsilon_2 - \bar{M}_1 \text{sign} \bar{\varepsilon}_1$. При выполнении достаточных условий возникновения скользящих режимов, являющихся основанием для выбора величины амплитуды $\tilde{\varepsilon}_1^T \dot{\tilde{\varepsilon}}_1 < 0 \Rightarrow \tilde{M}_1 > \|\tilde{C}_{11} \varepsilon_1 + \varepsilon_2\|, \bar{\varepsilon}_1^T \dot{\bar{\varepsilon}}_1 < 0 \Rightarrow \bar{M}_1 > \|\bar{C}_{11} \varepsilon_1 + \bar{C}_{12} \varepsilon_2\|$, переменные первого блока за конечный временной интервал $t_1 = \max\{\tilde{t}_1, \bar{t}_1\}$ попадут на многообразие скольжения $S_1 = \{\varepsilon_1 = 0\}$. Соотношения $\tilde{S}_1 = \tilde{\varepsilon}_1 = 0 \Leftrightarrow \tilde{z}_1 = \tilde{y}_1, \bar{S}_1 = \bar{\varepsilon}_1 = 0 \Leftrightarrow \bar{z}_1 = \bar{y}_1$ будут выполняться при $\forall t \geq \tilde{t}_1, \forall t \geq \bar{t}_1$, соответственно, что приведет к понижению динамического порядка системы на величину m_1 . Из уравнения статики первого подблока первого блока получаем $\dot{\tilde{\varepsilon}}_1 = 0 \Rightarrow \tilde{v}_{1\text{eq}} = (\tilde{M}_1 \text{sign} \tilde{\varepsilon}_1)_{\text{eq}} = \varepsilon_2$, из которого формируются корректирующие воздействия (2.26) во втором блоке. С учетом соотношений, полученных в первом блоке, уравнения второго блока примут вид $\dot{\tilde{\varepsilon}}_2 = \tilde{C}_{22} \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \tilde{M}_2 \text{sign} \tilde{\varepsilon}_2, \dot{\bar{\varepsilon}}_2 = \bar{C}_{22} \varepsilon_2 + \bar{C}_{23} \varepsilon_3 - \bar{M}_2 \text{sign} \bar{\varepsilon}_2$, и при $\tilde{\varepsilon}_2^T \dot{\tilde{\varepsilon}}_2 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \tilde{M}_2 > \|\tilde{C}_{22}\varepsilon_2 + \varepsilon_3\|$, $\bar{\varepsilon}_2^T \dot{\bar{\varepsilon}}_2 < 0 \Rightarrow \bar{M}_2 > \|\bar{C}_{22}\varepsilon_2 + \bar{C}_{23}\varepsilon_3\|$ за конечный интервал времени $t_2 > t_1$ изображающая точка попадет на многообразие скольжения $S_2 = \{\varepsilon_2 = 0 \cap \varepsilon_1 = 0\}$ с обеспечением соотношений $\varepsilon_2 = 0 \Leftrightarrow z_2 = y_2$, $\tilde{\varepsilon}_2 = 0 \Rightarrow \tilde{v}_{2\text{eq}} = \varepsilon_3$ при $\forall t \geq \tilde{t}_2$, $\forall t \geq \bar{t}_2$, соответственно, $t_2 = \max\{\tilde{t}_2, \bar{t}_2\}$, и т.д. Соответственно, в i -м блоке, $i = 3, \nu - 1$, учитывая предыдущие построения $\varepsilon_j = 0$, $j = \overline{1, i-1}$, получим замкнутую систему

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{i-1} = 0 &\Rightarrow \tilde{v}_{(i-1)\text{eq}} = \varepsilon_i, \\ \dot{\tilde{\varepsilon}}_i &= \tilde{C}_{ii}\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} - \tilde{M}_i \text{sign} \tilde{\varepsilon}_i, \quad \dot{\bar{\varepsilon}}_i = \bar{C}_{ii}\varepsilon_i + \bar{C}_{i,i+1}\varepsilon_{i+1} - \bar{M}_i \text{sign} \bar{\varepsilon}_i, \end{aligned} \quad (2.27)$$

в которой при выполнении условий

$$\tilde{\varepsilon}_i^T \dot{\tilde{\varepsilon}}_i < 0 \Rightarrow \tilde{M}_i > \|\tilde{C}_{ii}\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1}\|, \quad \bar{\varepsilon}_i^T \dot{\bar{\varepsilon}}_i < 0 \Rightarrow \bar{M}_i > \|\bar{C}_{ii}\varepsilon_i + \bar{C}_{ii}\varepsilon_{i+1}\| \quad (2.28)$$

за конечный интервал времени $t_i > t_{i-1}$ произойдет попадание на многообразие скольжения $S_i = \{\varepsilon_i = 0 \cap S_{i-1}\}$ с обеспечением соотношений $\varepsilon_i = 0 \Leftrightarrow z_i = y_i$, $\tilde{\varepsilon}_i = 0 \Rightarrow \tilde{v}_{i\text{eq}} = \varepsilon_{i+1}$. И, наконец, в последнем блоке $\dot{\varepsilon}_\nu = C_{\nu\nu}\varepsilon_\nu - M_\nu \text{sign} \varepsilon_\nu$ при $\varepsilon_\nu^T \dot{\varepsilon}_\nu < 0 \Rightarrow M_\nu > \|C_{\nu\nu}\varepsilon_\nu\|$ за конечное время $t_\nu > \max\{\tilde{t}_{\nu-1}, \bar{t}_{\nu-1}\}$ после попадания на многообразии $S_\nu = \{\varepsilon_\nu = 0 \cap S_{\nu-1}\}$ обеспечивается стабилизация переменных $\varepsilon_\nu = 0 \Leftrightarrow z_\nu = y_\nu$.

Замечание 2.1. В частном случае, когда система (2.20) разбита только на два блока (в частности, когда $\nu = 2$), во втором блоке корректирующие воздействия могут быть выбраны непрерывными, а именно, $v_2 = F_2 \tilde{v}_1$, $\dim F_2 = m_2 \times m_2$. В скользящем режиме поведение такой системы описывается уравнениями $\varepsilon_1 = 0$, $\dot{\varepsilon}_2 = (C_{22} - F_2)\varepsilon_2$. Поскольку пара $\{F_2, C_{22}\}$ – управляемая, выбором коэффициентов матрицы F_2 обеспечиваются желаемые темпы асимптотической сходимости переменных второго блока $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_2 = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} z_2 = y_2$.

В общем случае ($\nu > 2$) потребуется непосредственно получить значение эквивалентного управления (в отличие от систем с большими коэффициентами, где эквивалентные значения управлений $\tilde{v}_{i\text{eq}}$ в асимптотике совпадают с \tilde{v}_i (2.23)). В системах с разрывными управлениями понятие “эквивалентное управление” имеет вполне конкретный физический смысл [45]: эта функция равна среднему значению разрывного управления $\tilde{v}_{i\text{cp}}$, и для ее получения можно воспользоваться линейным фильтром первого порядка с малой постоянной времени:

$$\mu_i \dot{\tau}_i = -\tau_i + \tilde{v}_i, \quad \tau_i \in R^{m_i+1}, \quad i = \overline{1, \nu-1}. \quad (2.29)$$

С учетом (2.29) уравнения замкнутой системы (2.20), (2.26)–(2.28) примут вид

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}_i = \tilde{C}_{ii}\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} - \tilde{M}_i \tilde{E}_i \text{sign} \tau_{i-1}, \quad \dot{\bar{\varepsilon}}_i = \bar{C}_{ii}\varepsilon_i + \bar{C}_{i,i+1}\varepsilon_{i+1} - \bar{M}_i \bar{E}_i \text{sign} \tau_{i-1}, \quad i = \overline{2, \nu-1}; \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_\nu &= C_{\nu\nu}\varepsilon_\nu - M_\nu \text{sign} \tau_{\nu-1}, \\ \lim_{\mu_i \rightarrow 0} \tau_i(t) &= \tilde{v}_{i\text{eq}}(t) = \varepsilon_{i+1}(t). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Структурная схема описанного алгоритма представлена на рис. 2.3.

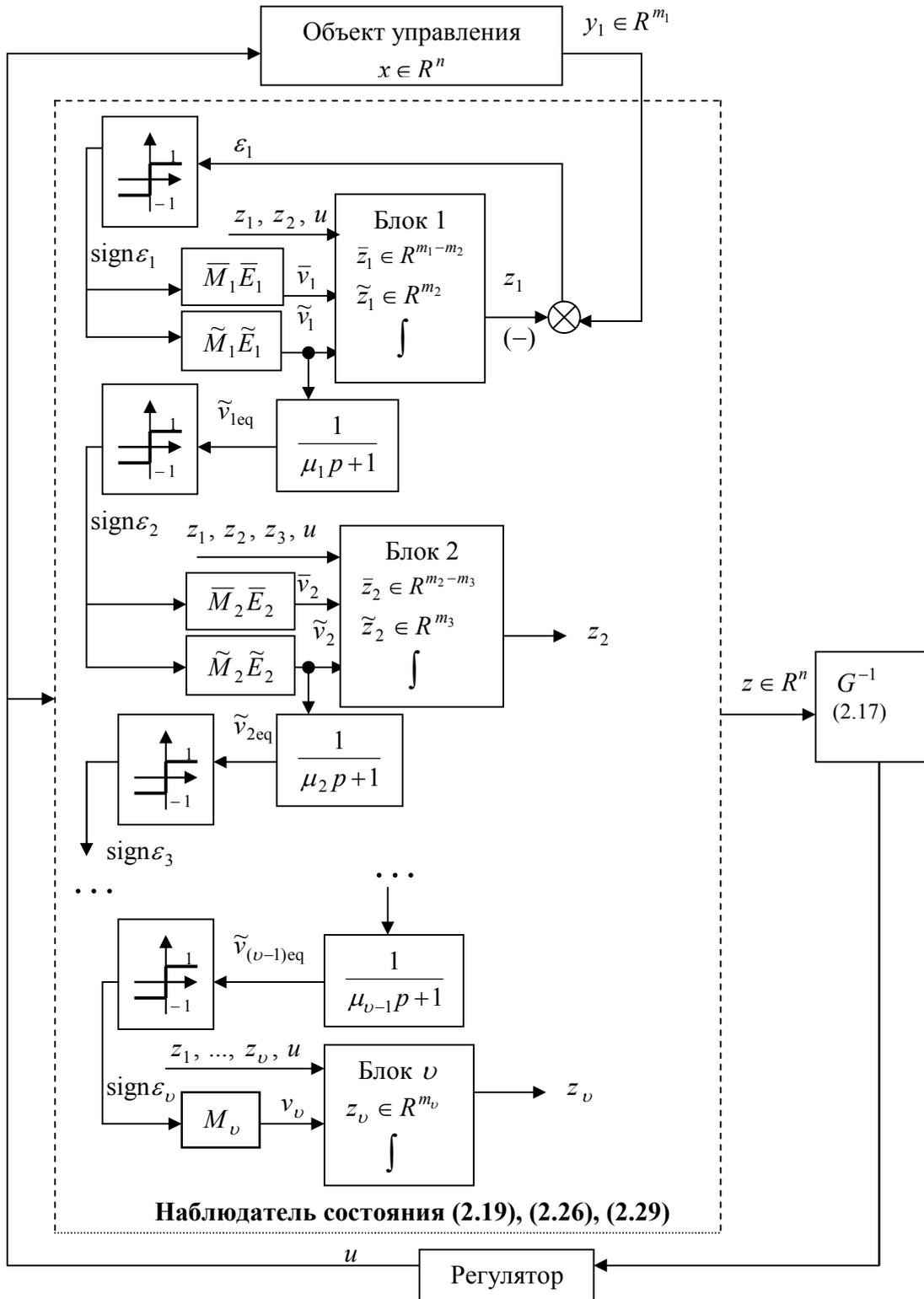


Рис. 2.3. Структурная схема формирования разрывных корректирующих воздействий блочного наблюдателя состояния

Обоснуем правомерность описанных выше теоретических построений. В построениях (2.26)–(2.31) для системы (2.20) полагалось, что на многообразиях S_i , $i = \overline{1, \nu}$ возникает идеальный скользящий режим, т.е. компоненты вектора разрывных корректирующих воздействий v переключаются с бесконечно большой частотой, и векторы фазовых скоростей направлены точно вдоль соответствующих поверхностей разрыва. Существующие в любой реальной системе неидеальности (запаздывание, гистерезис, инерционность) переключающего устройства приводят к тому, что движение происходит уже не по пересечению всех поверхностей разрыва $S_i = \{\varepsilon_i = 0 \cap S_{i-1}\}$, а в некоторой его окрестности (пограничном слое)

$$\|\varepsilon_i\| \leq \Delta_i, \quad \Delta_i = \text{const} > 0, \quad \|\varepsilon_i\| = (\varepsilon_i^T \varepsilon_i)^{1/2}, \quad i = \overline{1, \nu}, \quad (2.32)$$

где Δ_i – некоторые малые положительные числа, зависящие от типа неидеальностей. Такое движение, в отличие от *идеального скольжения*, называют *реальным* скользящим режимом. Ориентирование на реальный скользящий режим приводит к необходимости ввести в построения (2.20), (2.26)–(2.31) новые корректирующие воздействия $v^* = \text{col}(v_1^*, \dots, v_\nu^*) \in R^n$, $v_i^* = \text{col}(\tilde{v}_i^*, \bar{v}_i^*) \in R^{m_i}$, в которых учтены всевозможные неидеальности, и которые позволят осуществить регуляризацию задачи синтеза.

Для системы с пограничным слоем (2.32) эквивалентные значения \tilde{v}_{ieq}^* будут отличаться от \tilde{v}_{ieq} , $i = \overline{1, \nu-1}$. Так, в первом блоке системы (2.20) в некоторой окрестности многообразия S_1 за конечное время t_1 выполняются соотношения $S_1^* = \{\|\varepsilon_1\| \leq \Delta_1\} \Rightarrow \|y_1 - z_1\| \leq \Delta_1$, и для системы с пограничным слоем величина $\dot{\varepsilon}_1$ уже не равна нулю. Поэтому эквивалентные значения новых корректирующих воздействий в первом подблоке первого блока $\dot{\tilde{\varepsilon}}_1 = \tilde{C}_{11}\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \tilde{v}_1^*$ имеют вид

$$\tilde{v}_{1eq}^* = \tilde{v}_{1eq} - \dot{\tilde{\varepsilon}}_1. \quad (2.33)$$

Величина $\dot{\varepsilon}_1$ зависит от типа неидеальностей, при этом следует иметь в виду, что стремление Δ_1 к нулю, вообще говоря, не означает стремление к нулю величины $\dot{\tilde{\varepsilon}}_1$. Для получения значений (2.33) воспользуемся фильтрами (2.29). Тогда $\mu_1 \dot{\tau}_1 = -\tau_1 + \tilde{v}_1^*$ или

$$\mu_1 \dot{\tau}_1 = -\tau_1 + \tilde{v}_{1eq} - \dot{\tilde{\varepsilon}}_1, \quad \tau_1 \in R^{m_2}. \quad (2.34)$$

Теорема 2.2 [45]. Если в дифференциальном уравнении

$$\mu \dot{t} = -\tau + h(t) + H(t)\dot{\varepsilon},$$

где $\mu > 0 = \text{const}$, $\tau, h, \varepsilon \in R^m$, функции $h(t)$ и $H(t)$ и их производные первого порядка ограничены по норме некоторым числом M , $\|\varepsilon(t)\| \leq \Delta$, $\Delta > 0 = \text{const}$, то для любой пары положительных чисел t^* и δ найдется такое число $\gamma(\delta, t^*, M, \tau(0))$, что $\|\tau - h(t)\| \leq \delta$ для $0 < \mu \leq \gamma$, $\Delta/\mu \leq \gamma$, $t^* \leq t$.

В выражении (2.34) условия теоремы 2.2 выполняются, и, следовательно, выполняется условие

$$\lim_{\substack{\mu_1 \rightarrow 0 \\ \Delta_1 / \mu_1 \rightarrow 0}} \tau_1(t) = \tilde{v}_{1\text{eq}}(t), \quad (2.35)$$

где для конечного интервала времени $[0; T]$ величина τ_1 стремится к $\tilde{v}_{1\text{eq}}(t)$ в следующем смысле: для любой пары положительных чисел $t_1 < T$ и δ_1 существует такое $\gamma_1 > 0$, что при $0 < \mu_1 \leq \gamma_1$ и $\Delta_1 / \mu_1 \leq \gamma_1$ имеет место неравенство $\|\tau_1 - \tilde{v}_{1\text{eq}}\| \leq \delta_1$ при $t_1 \leq t \leq T$.

Действительно, окрестность поверхности разрыва шириной Δ_1 , в которой возможны произвольные, хаотичные колебания, следует уменьшить, чтобы приблизить реальный скользящий режим к идеальному. При уменьшении Δ_1 должна возрастать частота переключений управления, так как в противном случае амплитуда колебаний изображающей точки заведомо станет больше Δ_1 . Для фильтрации высокочастотной составляющей, определяемой переключениями в скользящем режиме, величина, обратная частоте переключений, должна быть намного меньше постоянной времени μ_1 . Данная величина пропорциональна Δ_1 , отсюда и следует, что отношение Δ_1 / μ_1 должно стремиться к нулю. Наконец, постоянную времени μ_1 следует также стремить к нулю, так как линейный фильтр не должен искажать медленные составляющие корректирующих воздействий, которые и равны $\tilde{v}_{1\text{eq}}$.

Заметим, что на практике постоянные времени $\mu_i > 0$, $i = \overline{1, \nu - 1}$ фильтров (2.29) являются малыми, но конечными величинами, поэтому в выражении (2.35) формально присутствуют также и собственные асимптотически затухающие движения фильтрующих устройств $\tau_{i\text{св}} = \tau_i(0)e^{-t/\mu_i}$. Таким образом, из выражений (2.29)–(2.35) следует, что за конечное время $t_i > t_{i-1}$ достигается некоторая окрестность Δ_i соответствующего многообразия S_i , причем $\lim_{\Delta_i \rightarrow 0} \varepsilon_i = 0$.

Пренебрегая собственной динамикой фильтров и неидеальностями переключающих устройств, в дальнейшем будем полагать, что задача оценивания в наблюдателях состояния с разрывными управляющими воздействиями (или обеспечение соотношений (2.27), (2.31)) решается за *теоретически конечное время* и осуществляется идеальный скользящий режим (как предельный случай реального скользящего режима с конечной частотой переключения при стремлении к нулю всех неидеальностей). Правомерность сделанного предположения связана с тем, что в задаче наблюдения реализации скользящих режимов и получение эквивалентных управлений (2.29)–(2.31) происходит в вычислительной среде, требуемое быстрое действие которой обеспечивается в современных микропроцессорах. В этом, кстати, заключается существенное преимущество использования разрывных управлений в задаче наблюдения по сравнению с задачами управления, где негативное воздействие различных неидеальностей зачастую не может быть устранено.

Отметим следующие преимущества каскадного синтеза наблюдателей с разрывной коррекцией:

- декомпозиция задачи синтеза, которая сводится к независимому выбору параметров (амплитуд разрывных управлений) в каждом блоке на основе неравенств (2.28);
- стабилизация системы (2.20) за теоретически конечное время t_ν ;
- инвариантность к изменению параметров.

Прокомментируем последнее утверждение. Поскольку вторые подблоки и последний блок системы (2.20) не участвуют в каскадных построениях (2.26)–(2.27) и обратном преобразовании (2.17), то в них допустимы вариации параметров. Предположим, что правые части данных подблоков в системе (2.16) не известны. Тогда соответствующие подблоки наблюдателя состояния (2.19) следует сформировать в виде

$$\dot{\bar{z}}_i = \bar{v}_i, \quad i = \overline{1, \nu-1}; \quad \dot{\bar{z}}_\nu = v_\nu. \quad (2.36)$$

С учетом (2.16), (2.36) получим уравнения относительно невязок

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_i = \sum_{j=1}^{i+1} \bar{C}_{ij} y_j - \bar{v}_i, \quad i = \overline{1, \nu-1}; \quad \dot{\bar{\varepsilon}}_\nu = \sum_{j=1}^{\nu} C_{\nu j} y_j - v_\nu,$$

где выбор амплитуд разрывных корректирующих воздействий определяется из условий

$$\bar{\varepsilon}_i^T \dot{\bar{\varepsilon}}_i < 0 \Rightarrow \bar{M}_i > \left\| \sum_{j=1}^{i+1} \bar{C}_{ij} y_j \right\|, \quad i = \overline{1, \nu-1}; \quad \bar{M}_\nu > \left\| \sum_{j=1}^{\nu} C_{\nu j} y_j \right\|. \quad (2.37)$$

Заметим, что если блоки наблюдателя (2.36) дополнить фильтрующими устройствами

$$\bar{\mu}_i \bar{\tau}_i = -\bar{\tau}_i + \bar{v}_i, \quad \bar{\tau}_i \in R^{m_i - m_{i+1}}, \quad i = \overline{1, \nu-1},$$

то за теоретически конечное время обеспечатся соотношения

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_i = 0 \Rightarrow \bar{v}_{ieq} = \sum_{j=1}^{i+1} \bar{C}_{ij} y_j, \quad \lim_{\bar{\mu}_i \rightarrow 0} \bar{\tau}_i = \bar{v}_{ieq}, \quad i = \overline{1, \nu-1}. \quad (2.38)$$

Полученные оценки линейных комбинаций (2.38) могут оказаться полезными для формирования обратной связи в качестве дополнительной информации.

Замечание 2.2. Тот факт, что мы располагаем текущей оценкой эквивалентного управления (2.31) и, возможно, (2.38) позволяет реализовать автоматическую подстройку амплитуд разрывов с целью уменьшить амплитуды разрывной коррекции (2.28), (2.37) после возникновения скользящих режимов в соответствующих блоках, что позволит уменьшить автоколебания в установившемся режиме и, как следствие, улучшить качество оценивания.

С учетом (2.28), (2.31) и (2.37)–(2.38) алгоритм настройки амплитуд в скользящем режиме имеет вид

$$\tilde{M}_i = \|\tau_i\| + \alpha_i \quad \text{при } t > t_i, \quad i = \overline{1, \nu-1}, \quad (2.39)$$

где α_i – произвольные, положительные, сколь угодно малые константы.

Структурная схема настройки амплитуды для первого подблока i -го блока наблюдателя показана на рис. 2.4.

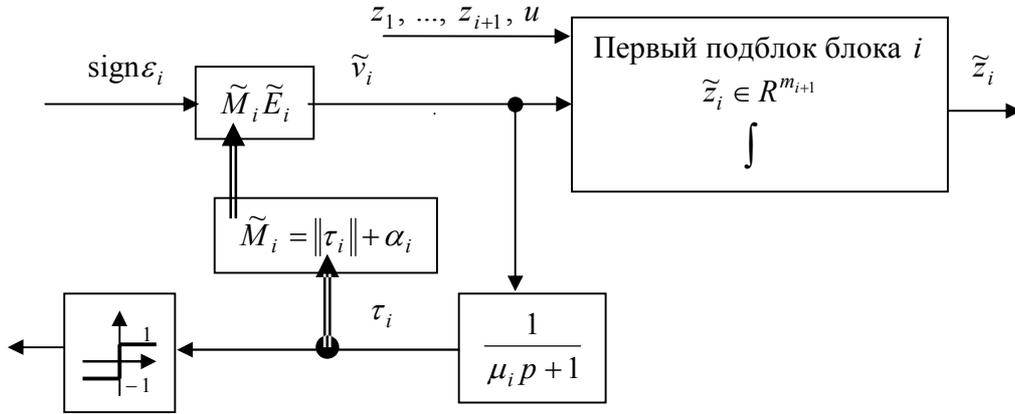


Рис. 2.4. Структурная схема формирования автополки разрывных корректирующих воздействий

2.4. Блочный синтез асимптотических наблюдателей состояния с конечными коэффициентами

Тот факт, что система дифференциальных уравнений, записанная относительно невязок (2.20) однородна, позволяет предположить, что декомпозиция задачи синтеза, осуществляемая в асимптотике (см. параграф 2.3.1), может быть сохранена и при конечных коэффициентах в корректирующих воздействиях наблюдателя. Сформулируем этот результат в виде следующей теоремы.

Теорема 2.3 [41]. Наблюдаемая система вида (2.1) с показателем наблюдаемости ν и индексами наблюдаемости $\sum_{i=1}^{\nu} m_i = n$ с помощью неособой замены переменных может быть приведена к верхней треугольной форме наблюдаемости с наперед заданными матрицами $F_{ii} \in R^{m_i \times m_i}$, $i = \overline{2, \nu}$ на главной диагонали вида:

$$\dot{y}^* = A^* y^* + B^* u, \quad y^* \in R^n,$$

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* & A_{13}^* & \dots & A_{1,\nu-1}^* & A_{1\nu}^* \\ A_{21}^* & F_{22} & A_{23}^* & \dots & 0 & 0 \\ A_{31}^* & 0 & F_{33} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ A_{\nu-1,1}^* & 0 & 0 & \dots & F_{\nu-1,\nu-1} & A_{\nu-1,\nu}^* \\ A_{\nu 1}^* & 0 & 0 & \dots & 0 & F_{\nu\nu} \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Другими словами, можно преобразовать исходную наблюдаемую систему к устойчивой (в невязках) системе с заданными собственными числами. Форма (2.40) является предпосылкой декомпозиции задачи синтеза соответствующего наблюдателя состояния за счет независимо выбираемых матриц на главной диагонали.

Процедура получения верхней треугольной формы наблюдаемости (2.40).

Данная конструктивная пошаговая процедура приведения к верхней треугольной форме наблюдаемости (2.40) описывается применительно к исходной системе (2.1), наблюдаемость которой предварительно установлена, т.е. БФН (2.16) уже получена и именно она взята за основу приводимых ниже преобразований. В дальнейших построениях будет использована форма (2.16) без разделения на подблоки, т.е. в виде

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^{i+1} C_{ij} y_j + B_i u, \quad i = \overline{1, v}, \quad (2.41)$$

где $y_i \in R^{m_i}$ и $C_{v, v+1} \equiv 0$. Можно найти аналогию нижеследующих преобразований с преобразованиями Люенбергера к наблюдателю состояния пониженной размерности (см. раздел 1.2), которые в данном случае распространены на всю систему и приводят к ее полной декомпозиции.

Шаг 1. Преобразования начинаются с последнего v -го блока системы (2.41), который с помощью неособой замены переменных $y_v^* = \sum_{j=1}^{v-1} L_{vj} y_j + y_v$, $y_v^* \in R^{m_v}$ представим в виде

$$\dot{y}_v^* = \sum_{j=1}^{v-1} A_{vj}^* y_j + A_{vv}^* y_v^* + B_v^* u, \quad (2.42)$$

где

$$A_{v1}^* = A_{v1} + \sum_{j=1}^{v-1} L_{vj} A_{j1} - A_{vv}^* L_{v1};$$

$$A_{vi}^* = A_{vi} + \sum_{j=i}^{v-1} L_{vj} A_{ji} - A_{vv}^* L_{vi} + L_{v, i-1} A_{i-1, i}, \quad i = \overline{2, v-1}; \quad A_{vv}^* = A_{vv} + L_{v, v-1} A_{v-1, v}.$$

С учетом того, что $\text{rank} A_{i-1, i} = \dim y_i$, последовательно выбираем матрицы $L_{v, v-1}, \dots, L_{v, 2}, L_{v, 1}$ следующим образом:

$$L_{v, v-1} = -(A_{vv} - F_{vv}) A_{v-1, v}^+; \quad L_{v, i-1} = -(A_{vi} + \sum_{j=i}^{v-1} L_{vj} A_{ji} - A_{vv}^* L_{vi}) A_{i-1, i}^+, \quad j = \overline{2, v-1};$$

что приведет блок (2.42) к виду

$$\dot{y}_v^* = A_{v1}^* y_1 + F_{vv} y_v^* + B_v^* u, \quad (2.43)$$

где вводимые здесь и далее матрицы F_{ii} , $i = \overline{2, v}$ подлежат определению, матрицы $A_{i-1, i}^+$ – псевдообратные.

Шаг 2. Аналогичная замена переменных применительно к $(\nu-1)$ -му блоку системы (2.41), а именно, $y_{\nu-1}^* = \sum_{j=1}^{\nu-2} L_{\nu-1,j} y_j + y_{\nu-1}$, $y_{\nu-1}^* \in R^{m_{\nu-1}}$, приводит его к виду

$$\dot{y}_{\nu-1}^* = \sum_{j=1}^{\nu-2} A_{\nu-1,j}^* y_j + A_{\nu-1,\nu-1}^* y_{\nu-1}^* + A_{\nu-1,\nu}^* y_{\nu}^* + B_{\nu-1}^* u, \quad (2.44)$$

где

$$\begin{aligned} A_{\nu-1,\nu-1}^* &= A_{\nu-1,\nu-1} - A_{\nu-1,\nu} L_{\nu,\nu-1} + L_{\nu-1,\nu-2} A_{\nu-2,\nu-1}; \\ A_{\nu-1,i}^* &= A_{\nu-1,i} + \sum_{j=i}^{\nu-2} L_{\nu-1,j} A_{ji} - A_{\nu-1,\nu-1}^* L_{\nu i} - A_{\nu-1,\nu} L_{\nu i} + L_{\nu-1,i-1} A_{i-1,i}, \quad i = \overline{1, \nu-2}. \end{aligned}$$

Последовательно выбирая матрицы преобразования $L_{\nu-1,i}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} L_{\nu-1,\nu-2} &= -(A_{\nu-1,\nu-1} - A_{\nu-1,\nu} L_{\nu,\nu-1} - F_{\nu-1,\nu-1}) A_{\nu-2,\nu-1}^+; \\ L_{\nu-1,i-1} &= -(A_{\nu-1,i} + \sum_{j=i}^{\nu-2} L_{\nu-1,j} A_{ji} - A_{\nu-1,\nu-1}^* L_{\nu i} - A_{\nu-1,\nu} L_{\nu i}) A_{i-1,i}^+, \quad i = \overline{2, \nu-2}, \end{aligned}$$

приведем блок (2.44) к виду

$$\dot{y}_{\nu-1}^* = A_{\nu-1,1}^* y_1 + F_{\nu-1,\nu-1} y_{\nu-1}^* + A_{\nu-1,\nu} y_{\nu}^* + B_{\nu-1}^* u, \quad (2.45)$$

и т.д.

Шаг i . Продолжая намеченную процедуру, на i -м шаге, $i = \overline{\nu-3, 2}$, введем замену переменных в системе (2.41), а именно, $y_i \rightarrow y_i^*$, $y_i^* = \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij} y_j + y_i$, $y_i^* \in R^{m_i}$, что приведет к виду

$$\dot{y}_i^* = \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}^* y_j + A_{ii}^* y_i^* + A_{i,i+1}^* y_{i+1}^* + B_i^* u, \quad (2.46)$$

где матрицы A_{ij}^* , $j = \overline{2, i}$ могут быть представлены в виде суммы $A_{ij}^* = \bar{A}_{ij}^* + L_{i,j-1} A_{j-1,j}$. Последовательный выбор матриц L_{ij} по соотношениям

$$L_{i,i-1} = -(\bar{A}_{ii}^* - F_{ii}) A_{i-1,i}^+; \quad L_{i,j-1} = -\bar{A}_{i,j-1}^* A_{j-1,j}^+, \quad j = \overline{2, i-1} \quad (2.47)$$

приводит блок (2.46) к виду

$$\dot{y}_i^* = A_{i1}^* y_1 + F_{ii} y_i^* + A_{i,i+1}^* y_{i+1}^* + B_i^* u. \quad (2.48)$$

Таким образом, после $(\nu - 1)$ -го шага, в соответствии с преобразованиями (2.42)–(2.48), система (2.41) приводится к виду (2.40) относительно новых переменных $y^* = \text{col}(y_1, \dots, y_\nu)$.

Основываясь на преобразованной модели объекта управления в виде (2.40), построим наблюдатель состояний размерности $(n - m_1)$ -го порядка

$$\dot{z}_i = A_{i1}^* y_1 + F_{ii} z_i + A_{i,i+1}^* z_{i+1} + B_i^* u, \quad i = \overline{2, \nu - 1}; \quad \dot{z}_\nu = A_{\nu 1}^* y_1 + F_{\nu\nu} z_\nu + B_\nu^* u, \quad (2.49)$$

где $\dim z_i = \dim y_i^* = \dim y_i = m_i$. В этом случае собственные числа матрицы, определяющей динамику системы, записанной относительно невязок $\dot{\varepsilon}_i = y_i^* - z_i$, $\varepsilon_i = R^{m_i}$, $i = \overline{2, \nu}$ в виде

$$\dot{\varepsilon}_i = F_{ii} \varepsilon_i + A_{i,i+1}^* \varepsilon_{i+1}, \quad i = \overline{2, \nu - 1}; \quad \dot{\varepsilon}_\nu = F_{\nu\nu} \varepsilon_\nu, \quad (2.50)$$

удовлетворяют соотношению $\prod_{i=2}^{\nu} \det(F_{ii} - I_{i \times i} \lambda) = 0$, и устойчивость системы (2.50) может

быть обеспечена соответствующим выбором коэффициентов матриц F_{ii} , $i = \overline{2, \nu}$.

Таким образом, задача наблюдения сводится к задаче стабилизации системы (2.50), синтез которой декомпозируется на независимые подзадачи. Существенно, что в каждой из подзадач можно произвольным образом задать не только собственные числа, но и сами матрицы собственных движений.

2.5. Задача слежения при неполных измерениях

В данном разделе изучаются структурные свойства многомерных линейных систем управления в задаче слежения за определенными значениями выходных переменных. Предполагается, что только выходные координаты доступны для измерения. Показана возможность применения каскадного метода к синтезу данной задачи при ослабленных условиях, налагаемых на класс функций задающих сигналов. В параграфе 2.5.1 описывается проблема и формулируются цели исследования. В параграфе 2.5.2 разработана совместная блочная форма наблюдаемости и управляемости по выходным переменным для линейных моделей объектов управления. В терминах блочной формы сформулированы необходимые и достаточные условия решения задачи слежения. На основе данной формы задачи наблюдения и слежения решаются в одних и тех же координатах.

2.5.1. Описание проблемы. Постановка задачи

При синтезе обратной связи в многомерных системах неизбежно возникает проблема «большой размерности», одним из способов разрешения которой является привлечение блочного принципа, основанного на приведении модели объекта управления к блочной форме управляемости (расщепление на блоки, размерности которых соответствует индексам управляемости) [13]. Тогда последовательное использование части переменных вектора состояния в качестве фиктивных управлений позволяет декомпонировать процедуру синтеза на независимые элементарные подзадачи меньшей размерности. Соответствующие блочно – управляемые формы и последующий каскадный синтез обратной связи были разработаны для решения таких фундаментальных задач теории автоматического управления, как задачи стабилизации, инвариантности, автономного управления, динамической компенсации для

линейных и нелинейных моделей объектов управления [13, 29, 43].

В данном разделе в терминах блочных форм предложено каскадное решение задачи слежения по выходу. Решение данной задачи опирается на результаты, полученные при решении перечисленных выше задач, и в то же время имеет свою специфику, связанную с постановкой данной задачи. Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y_1 = Dx, \quad (2.51)$$

где $x \in X \subset R^n$ – вектор состояния, $y_1 \in Y_1 \subset R^{m_1}$ – вектор выходных переменных, $u \in U \subset R^r$ – вектор управляющих воздействий, A, B, D – известные матрицы с постоянными коэффициентами соответствующих размерностей. Предполагается, что пара матриц $\{A, B\}$ – управляема. Сначала предположим, что все координаты вектора состояния известны. Задача слежения по выходу $y_1(t)$ за заданными значениями $y_{d1}(t)$ сводится к задаче стабилизации невязок относительно выходных переменных

$$\Delta y_1 = y_1 - y_{d1}(t) \rightarrow 0. \quad (2.52)$$

Стандартным способом решения поставленной задачи является сведение ее к задаче стабилизации системы (2.51), записанной относительно невязок вектора состояний $\Delta x = x - x_d(t)$

$$\Delta \dot{x} = A\Delta x + Bu + \eta(t), \quad y_1 = D(\Delta x + x_d), \quad \eta = Ax_d + \dot{x}_d, \quad (2.53)$$

где заданные значения компонент вектора состояний ищут из соотношения

$$Dx_d(t) = y_{d1}(t). \quad (2.54)$$

Отметим основные проблемы, возникающие при использовании данного подхода.

1. Задача стабилизации относительно всех компонент вектора состояний системы (2.53), в которой переменные $\eta(t)$ рассматриваются в качестве внешних возмущений, с необходимостью и достаточностью имеет решение лишь в случае, когда возмущающие воздействия приложены только к входам объекта управления [56]. В частности, задача стабилизации системы (2.53) всегда имеет решение, если размерность вектора управления равна (или больше) размерности системы и $\text{rank} B = n$. В случае, когда $\dim y_1 = \text{rank} D = n$, уравнение (2.54) имеет единственное решение. В противном случае (при $\dim y_1 = \text{rank} D < n$), уравнение (2.54) имеет более одного решения, и появляется многовариантная возможность выбора заданных значений только для части компонент (или их линейной комбинации) вектора состояний. Например, если компоненты вектора состояний системы (2.51) разбиты на две группы так, что в выражении $y_1 = D_1 x_1 + D_2 x_2$ выполнено условие $\text{rank} D_1 = \dim y_1 = m_1$, выбор заданных значений для компонент вектора $x_1 = D_1^{-1}(y_1 - D_2 x_2)$ обеспечивает равенство (2.54), а компоненты вектора состояний x_2 остаются свободными. Соответственно, размерность возмущающих воздействий в системе (2.53) сокращается, и решение задачи стабилизации ослабляется. Таким образом, для сведения задачи слежения относительно выходных переменных (2.52) к задаче стабилизации (2.53) следует найти некоторый компромисс между выбором базисного минора матрицы D (и вычисления заданных значений соответствующих компонент вектора состояния) и возможностью решения задачи стабилизации системы (2.53) относительно этих компонент. В целом ставится задача перевода задачи слежения по выходным переменным к задаче слежения относительно всего вектора состояний (или определения за-

даний на компоненты вектора состояний по заданным значениям выходных переменных), которая, в общем случае, не имеет решения.

2. Задание значений выходных переменных может быть не корректным в том смысле, что они не могут быть реализованы в замкнутой системе. Например, в системе второго порядка вида $\dot{x}_1 = ax_1 + x_2$, $\dot{x}_2 = u$ в силу физического соотношения между переменными типа положение–производная не представляется возможным реализовать произвольно заданные функции этих переменных. Записав эту систему относительно невязок $\Delta\dot{x}_1 = a\Delta x_1 + \Delta x_2 + (ax_{d1} + x_{d2} - \dot{x}_{d1})$, $\Delta\dot{x}_2 = u - \dot{x}_{d2}$ и рассматривая уравнения статики $\Delta\dot{x}_1 = \Delta\dot{x}_2 = 0$, получим единственно возможный вариант реализации заданных значений переменных $a_1x_{d1} + x_{d2} - \dot{x}_{d1} = 0$, где одна из переменных обрабатывает заданное значение, а другая удовлетворяет приведенному уравнению. С другой стороны, может возникнуть чисто техническая проблема реализуемости следящей системы, связанная с ее внутренней устойчивостью. Например, если в системе второго порядка, указанной выше, поставить задачу слежения относительно только второй компоненты $\Delta x_2(t) = x_2(t) - x_{d2}(t) \rightarrow 0$, то решение задачи слежения $\Delta x_2 = 0$ будет корректным, если собственные движения первой подсистемы (нуль замкнутой системы) устойчивы, т.е. $a < 0$.

Подводя итоги обсуждения особенностей задачи слежения, выделим необходимость рассмотрения двух следующих задач: 1) проверка постановки задачи слежения на корректность формирования заданий; 2) проверка работоспособности замкнутой системы на внутреннюю устойчивость (нули передачи).

В данном разделе поставленная задача слежения по выходу для системы (2.51) решается в рамках блочного подхода, который основан на представлении исходной системы в блочной форме управляемости [13] следующего вида:

$$\begin{aligned} \Delta\dot{x}_l &= A_{ll}\Delta x_l + B_l x_{l-1} + \eta + Q_l f(t); \\ \dot{x}_i &= A_{il}x_l + \dots + A_{ii}x_i + B_i x_{i-1} + Q_i f(t), \quad i = \overline{l-1}, 1; \\ \dot{x}_0 &= A_{0l}x_l + \dots + A_{00}x_0 + B_0 u + Q_0 f(t), \end{aligned} \quad (2.55)$$

где $\dim x_i = \text{rank} B_i = r_i$, $i = \overline{0, l}$, $\sum_{i=0}^l r_i = n$, A_{ij} , B_i , Q_i – матрицы соответствующих размерностей, l – показатель управляемости [40], вектор f – произвольные ограниченные по модулю внешние возмущения, вектор $\eta = (A_{ll}x_{dl} - \dot{x}_{dl}) \in R^{\eta}$ появляется в связи с записью верхнего уравнения (2.55) относительно невязок $\Delta x_l = x_l - x_{dl}$ при решении задачи слежения за переменными $x_l \in R^{\eta}$. В рамках синтеза систем с разделяемыми движениями относительно системы (2.55) доказана

Теорема 2.4 [43]. В системе (2.55) выполняются условия инвариантности относительно вектора выходных переменных $y = D_l x_l$.

При этом в предположении, что возмущающие воздействия не доступны для измерения и являются ограниченными по модулю функциями времени, решена задача стабилизации вектора выходных переменных $y = D_l x_l$ с заданной точностью. В частности, в предположении об ограниченности по модулю компонент вектора η , его также можно отнести к недоступным для измерения внешним возмущениям и не использовать в цепи обратной связи производные задающего воздействия. Для случая, когда возмущающие воздействия доступны для измерения и в предположении о существовании их производных до $(l-1)$ порядка включительно, решена задача асимптотической сходимости к нулю выходных переменных. Разработанная в [43] пошаговая процедура стабилизации системы (2.55) позволяет последова-

тельно выбирать переменные x_{l-1}, \dots, x_0 , рассматриваемые как фиктивные управления и собственно управления u . В силу выполнения условий $\dim x_i = \text{rank} B_i = r_i, i = \overline{0, l}$ задача стабилизации в каждом блоке является элементарной.

К сожалению, блочная форма управляемости (2.55) не позволяет решить задачу слежения за произвольными выходными переменными, поскольку в общем случае вектор выходных переменных в терминах системы (2.52) имеет вид $y = D_l x_l + \dots + D_0 x_0$ и не совпадает с вектором x_l . Тогда в терминах блочной формы (2.55) часть выходных переменных трактуются как фиктивные управления, что в общем случае противоречит постановке задачи слежения (2.52), согласно которой выходные переменные должны отрабатывать произвольные задающие воздействия.

Другая особенность задачи слежения проявляется в случае, если не все компоненты вектора состояния известны. Тогда требуется предварительно решить задачу наблюдения, что в многомерном случае требует преобразования модели объекта управления к блочной форме наблюдаемости (расщепление на блоки, размерность которых соответствует индексам наблюдаемости, см. раздел 2.2), что является предпосылкой каскадного синтеза задачи наблюдения. Блочная форма наблюдаемости системы (2.51) в предположении, что измеряются именно выходные переменные $y_1 = Dx$ и пара $\{D, A\}$ – наблюдаема, имеет вид

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^i A_{ij} y_j + A_{i,i+1} y_{i+1} + B_i u, \quad i = \overline{1, \nu-1}; \quad \dot{y}_\nu = \sum_{j=1}^{\nu} A_{ij} y_j + B_\nu u, \quad (2.56)$$

где $\dim y_i = \text{rank} A_{i,i+1} = m_i, \sum_{i=1}^{\nu} m_i = n, \nu$ – показатель наблюдаемости. В частном случае блочные формы управляемости (2.55) и наблюдаемости (2.56) могут совпасть (т.е. $\nu = l, y_i = x_i$ и в системе (2.56) $\text{rank} B_i = 0, i = \overline{1, \nu-1}, \dim y_\nu = \text{rank} B_\nu = r$), и тогда обе задачи решаются в одних терминах. Такая ситуация, например, складывается в системе управления положением манипуляционного робота при измерении положений звеньев (см. главу 7).

В общем случае такое совпадение не имеет места, т.е. блоки форм управляемости и наблюдаемости отличаются по составу, размерности и количеству. Тогда при синтезе обратной связи нельзя непосредственно воспользоваться результатами задачи наблюдения на основе формы (2.56), поскольку потребуется выполнить обратное преобразование, т.е. перейти к исходным переменным (2.51) и далее формировать их уже в блочную форму управляемости (2.55). Возникает естественное желание исключить процедуру обратных преобразований (например, в случае нелинейных систем можно столкнуться с отсутствием аналитического решения, либо придется прибегнуть к достаточно громоздким вычислениям) и решать обе задачи (наблюдения и управления) в одних и тех же терминах. В связи с декомпозиционной сущностью предлагаемых в работе алгоритмов (что предполагает расщепление исходной системы на элементарные блоки), ставится задача получения совместной блочной формы управляемости и наблюдаемости исходной системы, на основе которой можно решить задачи наблюдения и слежения за выходными переменными в одних и тех же координатах. Предполагается, что векторы выходных (управляемых) и измеряемых переменных совпадают.

2.5.2. Совместная блочная форма наблюдаемости и управляемости по выходным переменным

В данном параграфе разработана пошаговая процедура приведения системы (2.51) к блочно-канонической форме управляемости относительно выходных переменных (БКФУВ), которая при совпадении в системе (2.51) векторов измеряемых и выходных переменных ($y_1 = Dx$) будет одновременно и блочно-управляемой и блочно-наблюдаемой. Предполагает-

ся, что пара матриц $\{A, B\}$ – управляема, $\{D, A\}$ – наблюдаема.

Процедура анализа.

Шаг 1. Без ограничения общности предположим, что в системе (2.51) $\text{rank} D = m_1 \neq 0$, $m_1 < n$.

а) Перегруппируем компоненты вектора состояния $x = \text{col}(x', x_1)$, выполним неособую замену переменных $x \rightarrow \text{col}(y, x_1)$, где $\dim x' = \dim y_1 = m_1$, $\dim x_1 = n - m_1$, и запишем систему (2.51) относительно новых координат:

$$\dot{y}_1 = A_{11}y_1 + A_{10}x_1 + B_1u, \quad \dot{x}_1 = A_{x11}y_1 + A_{x10}x_1 + B_{x1}u. \quad (2.57)$$

б) Предположим, что в первом уравнении системы (2.57) $\text{rank} B_1 = r_1$ и $\text{rank}\{B_1, A_{10}\} = r_1 + m_2 \leq m_1$. Тогда первое уравнение системы (2.57) после последовательного приведения сначала к блочной форме управляемости относительно истинных управлений u , а затем относительно фиктивных управлений x_1 примет вид

$$\dot{\bar{y}}_1 = \bar{A}_{11}y_1, \quad \dot{y}_2^* = \tilde{A}_{21}y_1 + \tilde{A}_{20}x_1, \quad \dot{\hat{y}}_1 = \hat{A}_{11}y_1 + \hat{A}_{10}x_1 + \hat{B}_1u, \quad (2.58)$$

где $y_1 = \text{col}(\bar{y}_1, y_2^*, \hat{y}_1) \in R^{m_1}$, $\dim y_2^* = \text{rank} \tilde{A}_{20} = m_2$, $\dim \hat{y}_1 = \text{rank} \hat{B}_1 = r_1$, $\dim \bar{y}_1 = m_1 - r_1 - m_2 = \bar{m}_1$. Заметим, что в частном случае в системе (2.58) может отсутствовать по признаку равенства нулю размерности их вектора состояния первое уравнение (при $r_1 + m_2 = m_1$), или второе уравнение (при $m_2 = 0$), или третье уравнение (при $r_1 = 0$). Ситуация $r_1 + m_2 = 0$ невозможна, поскольку противоречит условию наблюдаемости исходной системы.

в) Если $r_1 \neq 0$, то введем невырожденное преобразование вектора управляющих воздействий следующего вида:

$$\begin{pmatrix} \hat{B}_1' & \hat{B}_1'' \\ 0 & I_{(r-r_1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ u_1 \end{pmatrix}, \quad (2.59)$$

где $u = \text{col}(\hat{u}_1, u_1)$, $\hat{u}_1, \omega_1 \in R^r$, $u_1 \in R^{r-r_1}$, $\hat{B}_1 = (\hat{B}_1' \hat{B}_1'')$, $\dim \hat{B}_1' = (r_1 \times r_1)$, $\det \hat{B}_1' \neq 0$, $I_{(r-r_1)}$ – здесь и далее обозначение единичных матриц. Тогда третье уравнение (2.58) принимает вид $\dot{\hat{y}}_1 = \hat{A}_{11}y_1 + \hat{A}_{10}x_1 + \omega_1$. В предположении, что $m_2 < \dim x_1$, переходим ко второму шагу преобразований.

Шаг 2. На втором шаге аналогичные преобразования применяются ко второму уравнению системы (2.57), которое с учетом замены (2.59) принимает вид

$$\dot{x}_1 = A_{x11}y_1 + A_{x10}x_1 + P_{x1}\omega_1 + B_{x11}u_1, \quad \dot{y}_2^* = \tilde{A}_{21}y_1 + \tilde{A}_{20}x_1. \quad (2.60)$$

Второе уравнение системы (2.60) рассматривается в качестве фиктивного выхода.

а) Перегруппируем компоненты вектора состояния $x_1 = \text{col}(x_1', x_2^*)$, выполним неособую замену переменных $x_1 = \text{col}(y_2^*, x_2^*)$, где $\dim x_1' = \dim y_2^* = m_2$, $\dim x_2^* = n - m_1 - m_2$, и запишем систему (2.60) относительно новых координат

$$\begin{aligned}\ddot{y}_2^* &= \tilde{A}_{21}^* y_1 + \tilde{A}_2^* \dot{y}_2^* + \tilde{A}_{20}^* x_2^* + \tilde{P}_2^* \omega_1 + \tilde{B}_2^* u_1, \\ \dot{x}_2^* &= A_{x21}^* y_1 + A_{x2}^* \dot{y}_2^* + A_{x20}^* x_2^* + P_{x2}^* \omega_1 + B_{x21}^* u_1.\end{aligned}\quad (2.61)$$

Начиная со второго шага потребуется вводить дополнительные замены переменных с целью исключить из правых частей уравнений (2.61) вторые и четвертые слагаемые. Замена переменных $\dot{y}_2 = \dot{y}_2^* - \tilde{P}_2^* \hat{y}_1 - \tilde{A}_2^* y_2^*$, $x_2 = x_2^* - P_{x2}^* \hat{y}_1 - A_{x2}^* y_2^*$ приводит к виду

$$\ddot{y}_2 = A_{21} y_1 + A_{20} x_2 + B_2 u_1, \quad \dot{x}_2 = A_{x21} y_1 + A_{x20} x_2 + B_{x2} u_1. \quad (2.62)$$

б, в) Аналогично преобразованиям первого шага, представим систему (2.62) в виде

$$\begin{aligned}\ddot{\bar{y}}_2 &= \bar{A}_{21} y_1, \quad \ddot{y}_3^* = \tilde{A}_{31}^* y_1 + \tilde{A}_{30}^* x_2, \quad \ddot{\hat{y}}_2 = \hat{A}_{21} y_1 + \hat{A}_{20} x_2 + \omega_2, \\ \dot{x}_2 &= A_{x21} y_1 + A_{x20} x_2 + P_{x2} \omega_2 + B_{x22} u_2,\end{aligned}\quad (2.63)$$

где $u_1 = \text{col}(\omega_2, u_2)$, $\dim \hat{y}_2 = \dim \omega_2 = r_2$, $\dim y_3^* = \text{rank} \tilde{A}_{30}^* = m_3$, $\bar{y}_2 \in R^{m_2 - m_3 - r_2}$, $x_2 \in R^{n - m_1 - m_2}$, $u_2 \in R^{r - r_1 - r_2}$.

В случае отсутствия второго уравнения в (2.63) ($m_3 = 0$) процедура заканчивается. В противном случае ($m_3 \neq 0$) переходим к третьему шагу, на котором описанные преобразования применяются к системе $\dot{x}_2 = A_{x21} y_1 + A_{x20} x_2 + P_{x2} \omega_2 + B_{x22} u_2$, $\dot{y}_3^* = \tilde{A}_{31}^* y_1 + \tilde{A}_{30}^* x_2$ и т.д.

Приведенная процедура заканчивается по признаку $m_i = 0$ за конечное число шагов, поскольку на каждом i -м шаге конечная размерность вектора x_{i-1} понижается.

Пусть процедура заканчивается на ν -м шаге. Выпишем окончательный вид системы в блочно-канонической форме управляемости относительно выходных переменных $y_1 = \text{col}(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_\nu, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_\nu) \in R^m$ в обозначениях $\bar{y}_i = \bar{y}_{i1}$, $\hat{y}_i = \hat{y}_{i1}$, $i = \overline{1, \nu}$:

$$\dot{\bar{y}}_{11} = \bar{A}_{11} y_1, \quad \dot{\bar{y}}_{21} = \bar{y}_{22}, \quad \dot{\bar{y}}_{22} = \bar{A}_{21} y_1, \quad \dots, \quad \dot{\bar{y}}_{\nu 1} = \bar{y}_{\nu 2}, \quad \dots, \quad \dot{\bar{y}}_{\nu \nu} = \bar{A}_{\nu 1} y_1; \quad (2.64)$$

$$\dot{\hat{y}}_{11} = \sum_{j=1}^{\nu} \hat{A}_{1j} y_j + \hat{A}_1 x_\nu + \omega_1, \quad \dot{\hat{y}}_{21} = \hat{y}_{22}, \quad \dot{\hat{y}}_{22} = \sum_{j=1}^{\nu} \hat{A}_{2j} y_j + \hat{A}_2 x_\nu + \omega_2, \quad \dots, \quad (2.65)$$

$$\dot{\hat{y}}_{\nu 1} = \hat{y}_{\nu 2}, \quad \dots, \quad \dot{\hat{y}}_{\nu \nu} = \sum_{j=1}^{\nu} \hat{A}_{\nu j} y_j + \hat{A}_\nu x_\nu + \omega_\nu;$$

$$\dot{x}_\nu = \sum_{j=1}^{\nu} A_{x\nu j} y_j + A_{x\nu} x_\nu + B_{x\nu} u_\nu. \quad (2.66)$$

Суммарная размерность системы (2.64)–(2.66), структурная схема которой изображена на рис. 2.5, равна размерности исходной системы и $\dim \bar{y}_1 + \dim \hat{y}_1 = \dim y_1$. Система (2.64) в предположении об управляемости исходной системы будет управляемой по входам \hat{y}_1 .

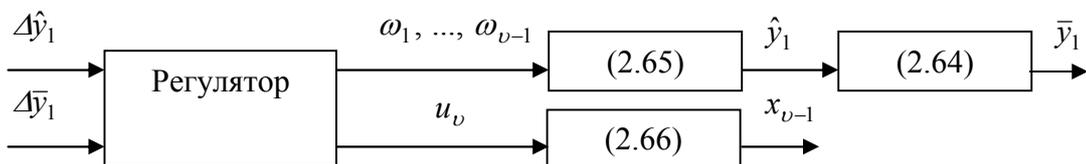


Рис.2.5. Структурная схема БКФУВ

Применительно к системе (2.64)–(2.66) вопрос о решении задачи слежения по выходу решается с необходимостью и достаточностью на основе следующих соображений.

1) Учитывая, что в дальнейшем рассматривается задача стабилизации систем (2.64) и (2.65), необходимым условием задачи слежения по выходу является стабилизируемость системы (2.66) или выполнение условия: пара $\{A_{xv}, B_{xv}\}$ – управляема. В частном случае, когда $\dim u_v = 0$, необходимым условием решения задачи является требование, чтобы собственные движения системы (2.66) были устойчивы.

2) В случае, когда система (2.64) отсутствует ($\dim \bar{y}_1 = \dim(\bar{y}_{11}, \dots, \bar{y}_{v1})^T = 0$), подвектор состояний системы (2.65) $\hat{y}_1 = \text{col}(\hat{y}_{11}, \dots, \hat{y}_{v1})$ с точностью до неособой замены переменных совпадает с вектором выходных переменных $y_1 = C\hat{y}_1$, где матрица C ($\det C \neq 0$) определяется согласно изложенной выше процедуре. Каждая из подсистем (2.65) имеет структуру блочно-канонической формы управляемости (2.55) и, следовательно, задача слежения имеет решение для произвольных задающих воздействий y_{d1} . Отметим, что условия автономного управления [40] в данном случае не выполняются. Приведенные выше соображения позволяют сформулировать следующий результат.

Теорема 2.5. Задача слежения по выходным переменным (2.51)–(2.52) имеет решение тогда и только тогда, когда в ее представлении (2.64)–(2.65) $\dim \bar{y}_1 = \dim(\bar{y}_{11}, \dots, \bar{y}_{v1})^T = 0$ и пара матриц $\{A_{xv}, B_{xv}\}$ – стабилизируема.

Доказательство необходимости непосредственно следует из того факта, что если хотя бы одно i -е уравнение в системе (2.64) присутствует, часть компонент вектора входных переменных \hat{y}_1 отрабатывают заданные значения $\bar{y}_{di}(t)$. Действительно, рассмотрим без ограничения общности решение задачи слежения $\Delta y_1 = y_1 - y_{d1}(t) \rightarrow 0$ в последней подсистеме (2.64) $\Delta \dot{\bar{y}}_{v1} = \bar{y}_{v2} + \dot{y}_{v1d}, \dots, \dot{\bar{y}}_{vv} = \bar{A}_{v1}(\bar{y}_1, \hat{y}_1)^T$, где переменные \hat{y}_1 рассматриваются в качестве фиктивных переменных. Тогда, как показано в конструктивной процедуре доказательства достаточности этой теоремы, переменные \hat{y}_1 становятся функциями по невязкам Δy_1 , что в свою очередь не позволяет решить задачу слежения за произвольными заданиями по этим переменным. Достаточность следует из приводимой ниже конструктивной процедуры синтеза обратной связи.

Синтез наблюдателя.

Предварительно рассмотрим решение задачи наблюдения в системе (2.65)–(2.66), в которой вектор y_1 доступен для измерения. Согласно процедуре система (2.65) состоит из блочно-канонических цепочек наблюдаемости относительно верхних координат \hat{y}_{i1} , $i = \overline{1, v}$. Построение наблюдателей состояния для каждой цепочки

$$\dot{\hat{z}}_{ik} = \hat{z}_{i,k+1} + v_{ik}, \quad i = \overline{1, v-1}, \quad k = \overline{1, i-1}; \quad \dot{\hat{z}}_{ii} = \sum_{j=1}^v \hat{A}_{ij} \hat{z}_j + \omega_i + v_{ii}, \quad i = \overline{1, v}, \quad (2.67)$$

с учетом (2.65)–(2.67) приведет к системе уравнений относительно невязок $\hat{\varepsilon}_i = \hat{y}_i - \hat{z}_i$, $\dim \hat{\varepsilon}_i = \dim \hat{y}_i = \dim \hat{z}_i = m_i$ вида

$$\dot{\hat{\varepsilon}}_{ik} = \hat{\varepsilon}_{i,k+1} - v_{ik}, \quad i = \overline{1, v-1}, \quad k = \overline{1, i-1}; \quad \dot{\hat{\varepsilon}}_{ii} = \sum_{j=1}^v \hat{A}_{ij} \hat{\varepsilon}_j + \hat{A}_i x_v - v_{ii}, \quad i = \overline{1, v}. \quad (2.68)$$

Последовательное формирование разрывных корректирующих воздействий наблюда-

теля $v_{i1} = M_{i1} \text{sign} \hat{\varepsilon}_{i1}$, $v_{ik} = M_{ik} \text{sign} v_{i,k-1(\text{eq})}$, $v_{i,k-1(\text{eq})} = \hat{\varepsilon}_{ik}$ при выполнении условий существования скользящих режимов $M_{ik} > \|\hat{\varepsilon}_{i,k+1}\|$, $k = \overline{1, i-1}$, $M_{ii} > \left| \sum_{j=1}^v \hat{A}_{ij} \hat{\varepsilon}_j + \hat{A}_i x_v \right|$, $i = \overline{1, v}$ приведет к стабилизации системы (2.68) за конечное время $\hat{\varepsilon}_i = 0 \Rightarrow \hat{y}_i = \hat{z}_i$, $i = \overline{1, v}$. Из последних уравнений системы (2.68)

$$\dot{\hat{\varepsilon}}_{ii} = \sum_{j=1}^v \hat{A}_{ij} \hat{\varepsilon}_j + \hat{A}_i x_v - M_{ii} \text{sign} \hat{\varepsilon}_{ii}, \quad i = \overline{1, v} \quad (2.69)$$

согласно методу эквивалентного управления получим оценки линейных комбинаций переменных системы (2.66):

$$v_{ii(\text{eq})} = \hat{A}_i x_v, \quad i = \overline{1, v}. \quad (2.70)$$

Поскольку система (2.51) наблюдаема, то пара матриц $\{\hat{A}, A_{xv}\}$ также наблюдаема, где

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{A}_1 \\ \dots \\ \hat{A}_v \end{pmatrix}.$$

В частном случае, когда $\text{rank} \hat{A} = \dim x_v$, из выражений (2.70) непосредственно получаем оценки неизмеряемых переменных x_v , необходимых для стабилизации системы (2.66). В общем случае ($\text{rank} \hat{A} < \dim x_v$ и $\dim u_v \neq 0$) выражения (2.70) принимаются в качестве фиктивного выхода для уравнений относительно неизмеряемых переменных, для которых независимо строится наблюдатель состояния желаемым образом.

Каскадный синтез обратной связи.

Вернемся к решению задачи слежения в системе (2.65), в которой после решения за конечное время задачи наблюдения (2.67) все координаты известны, а выражения (2.70) непосредственно используются для формирования комбинированного управления. Поскольку канонические цепочки (2.65) являются одновременно и блочно-наблюдаемыми и блочно-управляемыми, обе задачи решаются в одних и тех же терминах.

Без ограничения общности рассмотрим последнюю подсистему системы (2.65), записанную относительно невязки $\Delta \hat{y}_{v1} = \hat{y}_{v1} - \hat{y}_{dv1}(t)$, одновременно упростив запись с помощью обозначений $x_1 = \Delta \hat{y}_{v1}$, $x_2 = \hat{y}_{v2}$, ..., $x_v = \hat{y}_{vv}$, $u = \omega_v + \sum_{j=1}^v \hat{A}_{vj} y_j + v_{vv(\text{eq})}$, $\eta = \hat{y}_{dv1} - \dot{\hat{y}}_{dv1}$

$$\dot{x}_1 = x_2 + \eta; \quad \dot{x}_i = x_{i+1}, \quad i = \overline{2, v-1}; \quad \dot{x}_v = u. \quad (2.71)$$

Приведем решение задачи стабилизации с заданной точностью $|x_1| \leq \delta_1 = \text{const}$ системы (2.71) в предположении $|\eta(t)| \leq \Phi = \text{const}$. Для доказательства достаточных условий устойчивости используется второй метод Ляпунова. Представим систему (2.71) в виде

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_1 &= -k_1\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \eta; \quad \dot{\bar{x}}_i = -k_i\bar{x}_i + \bar{x}_{i+1} + k_1\dots k_{i-1}\eta, \quad i = \overline{2, \nu-1}; \\ \dot{\bar{x}}_\nu &= -k_\nu\bar{x}_\nu + w + u + k_1\dots k_{\nu-1}\eta\end{aligned}\quad (2.72)$$

с помощью пошаговой процедуры неособых преобразований $\bar{x}_1 = x_1$; $\bar{x}_i = \sum_{j=1}^{i-1} p_{ij}\bar{x}_j + x_i$, $i = \overline{2, \nu}$; $w = \sum_{j=1}^{\nu} p_{\nu+1,j}\bar{x}_j$, где $p_{21} = k_1$; $p_{i1} = -k_1 p_{i-1,1}$, $i = \overline{3, \nu+1}$; $p_{ij} = p_{i-1,j-1} - p_{i-1,j}k_j$, $j = \overline{2, i-2}$, $i = \overline{4, \nu+1}$; $p_{i,i-1} = p_{i-1,i-2} + k_{i-1}$, $i = \overline{3, \nu+1}$; $k_i > 0$, $i = \overline{1, \nu}$ – коэффициенты обратной связи, подлежащие определению. Компенсируя переменную w в системе (2.72) выбором управлений вида $u = -w$, запишем последнее уравнение системы (2.72) в виде

$$\dot{\bar{x}}_\nu = -k_\nu\bar{x}_\nu + k_1\dots k_{\nu-1}\eta. \quad (2.73)$$

Для нахождения нижних оценок коэффициентов обратной связи введем квадратичную форму (функцию Ляпунова)

$$V = \sum_{i=1}^{\nu} V_i, \quad V_i = \frac{1}{2} \bar{x}_i^2 \quad (2.74)$$

и рассмотрим следующую пошаговую процедуру.

Шаг 1. Для производной первого слагаемого квадратичной формы (2.74) в силу (2.72) справедлива следующая оценка: $\dot{V}_1 = \bar{x}_1^T (-k_1\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \eta) \leq |\bar{x}_1| \cdot (-k_1|\bar{x}_1| + |\bar{x}_2| + |\eta|)$. Неравенство $\dot{V}_1 < 0$ обеспечивается вне окрестности $|\bar{x}_1| \leq (|\bar{x}_2| + |\eta|) / k_1 \leq \delta_1$ при выполнении соотношения $k_1 > (|\bar{x}_2| + |\eta|) / \delta_1$. Учитывая, что на втором шаге процедуры выбором коэффициента k_2 (при фиксированном коэффициенте k_1) обеспечивается выполнение неравенства $|\bar{x}_2| \leq \delta_2$, запишем соотношение для выбора нижней оценки коэффициента k_1 : $k_1^* = k_1 > (\delta_2 + |\eta|) / \delta_1$.

Процедура выбора коэффициентов, описанная на первом шаге, аналогичным образом повторяется на шагах $i = \overline{2, \nu-1}$.

Шаг i . Для i -го слагаемого производной квадратичной формы (2.74) в силу (2.72) справедлива следующая оценка:

$$\dot{V}_i = \bar{x}_i^T (-k_i\bar{x}_i + \bar{x}_{i+1} + k_1\dots k_{i-1}\eta) \leq |\bar{x}_i| \cdot (-k_i|\bar{x}_i| + |\bar{x}_{i+1}| + k_1^* \dots k_{i-1}^* |\eta|).$$

Неравенство $\dot{V}_i < 0$ обеспечивается вне окрестности $|\bar{x}_i| \leq (|\bar{x}_{i+1}| + k_1^* \dots k_{i-1}^* |\eta|) / k_i \leq \delta_i$ при выполнении условия $k_i > (|\bar{x}_{i+1}| + k_1^* \dots k_{i-1}^* |\eta|) / \delta_i$, которое при обеспечении на $(i+1)$ -м шаге соотношения $|\bar{x}_{i+1}| \leq \delta_{i+1}$ дает нижнюю оценку для выбора коэффициента обратной связи в i -м блоке системы: $k_i^* = k_i > (\delta_{i+1} + k_1^* \dots k_{i-1}^* |\eta|) / \delta_i$.

Шаг ν . Для последнего слагаемого производной квадратичной формы (2.74) в силу (2.73) справедлива следующая оценка:

$$\dot{V}_\nu = \bar{x}_\nu^T (-k_\nu\bar{x}_\nu + k_1\dots k_{\nu-1}\eta) \leq |\bar{x}_\nu| \cdot (-k_\nu|\bar{x}_\nu| + k_1^* \dots k_{\nu-1}^* |\eta|).$$

Неравенство $\dot{V}_v < 0$ обеспечивается вне окрестности $|\bar{x}_v| \leq k_1^* \dots k_{v-1}^* |\eta| / k_v \leq \delta_v$, если выполнено условие $k_v^* = k_v > k_1^* \dots k_{v-1}^* |\eta| / \delta_v$, которое совпадает с выражением для нижней оценки коэффициента обратной связи в последнем блоке системы (2.72) с учетом (2.73).

Приведенная процедура синтеза обратной связи решает поставленную задачу слежения в последней подсистеме (2.65), и поведение переменных в замкнутой системе подчиняется следующей логической цепочке: $|\bar{x}_v| \leq \delta_v \Rightarrow |\bar{x}_{v-1}| \leq \delta_{v-1} \Rightarrow |\bar{x}_{v-2}| \leq \delta_{v-2} \Rightarrow |\bar{x}_1| = |x_1| \leq \delta_1$. Использование аналогичных процедур выбора коэффициентов в цепи обратной связи для других подсистем системы (2.65) решает поставленную задачу слежения относительно выходных переменных.

Результаты данного раздела распространены на частный случай нелинейных систем, когда блочные формы наблюдаемости и управляемости совпадают. В главе 7 разработанная процедура синтеза использована в решении задачи применительно к системе управления положением манипуляционного робота при измерении угловых положений звеньев.

Замечание 2.3. Последнее условие теоремы 2.6 относительно стабилизируемости пары матриц $\{A_{xv}, B_{xv}\}$ (или устойчивости нулей передачи замкнутой системы [70]) является условием технической реализуемости замкнутой системы.

Замечание 2.4. В предложенной процедуре синтеза задачи слежения с заданной точностью относительно выходных переменных в цепи обратной связи используются лишь невязки относительно выходных переменных и их заданным значениям (в отличие от задачи асимптотической сходимости невязок к нулю, где используются и их производные). Более того, в постановке задачи слежения с заданной точностью не налагаются дополнительные ограничения на гладкость функций заданий, и требуется лишь выполнение условия их ограниченности по модулю вместе с производными первого порядка.

Замечание 2.5. В рамках геометрического подхода [40, 81] получены необходимые и достаточные условия решения задачи слежения по выходным переменным. Предлагаемый в данном разделе прямой синтез задачи слежения на основе блочно-канонической формы управляемости относительно выходных переменных, во-первых, позволяет исключить этап анализа условий существования решения и непосредственно приступить к решению задачи синтеза. Во-вторых, использование метода разделения движений [13] (или процедуры backstepping [65]) позволяет декомпозировать решение задачи синтеза высокой размерности на независимо решаемые подзадачи меньшей размерности.

2.6. Идентификация многомерных динамических систем на скользящих режимах

В данном разделе предложен метод прямой идентификации параметров применительно к линейной системе с одним входом и одним выходом общего вида (SISO-system). В основе синтезированных алгоритмов лежит метод расширения пространства состояний и синтез динамической подсистемы идентификации (оценки) неизвестных параметров и наблюдателя состояний с использованием теории скользящих режимов.

2.6.1. Постановка задачи

Рассмотрим линейную динамическую систему с одним входом и с одним выходом вида

$$\dot{x} = (A + \bar{A})x + (b + \bar{b})u, \quad y_1 = (d + \bar{d})^T x + (c + \bar{c})u, \quad (2.75)$$

где $x \in R^n$, $u, y_1 \in R$, постоянные коэффициенты матрицы A и векторов b, d, c полагаются

известными, постоянные параметры матрицы \bar{A} и векторов \bar{b} , \bar{d} , \bar{c} полагаются неизвестными. Ставится задача оценивания неизмеряемых координат вектора состояния x и неизвестных параметров по информации о выходе y_1 в предположении, что система (2.75) является управляемой и наблюдаемой.

Общая схема предлагаемого подхода может быть объяснена следующим образом. В условиях параметрической неопределенности задача наблюдения в общем случае не имеет решения. В то же время, для систем, представленных в блочной форме наблюдаемости, задача наблюдения в условиях параметрической неопределенности может быть решена с использованием теории скользящих режимов, если известны параметры каналов воздействия управления. Если положить исходную систему наблюдаемой, то неособым преобразованием ее можно представить в канонической форме наблюдаемости (при этом само преобразование не известно). Однако, если параметры каналов воздействия управлений не известны, не удастся компенсировать влияние управления в задаче наблюдения. Поэтому на следующем этапе предлагается за счет расширения пространства состояний свести исходную систему к совместной блочной форме управляемости и наблюдаемости. В таком представлении уже удастся решить задачу наблюдения при построении наблюдателя на скользящих режимах, а затем последовательно решить задачу идентификации параметров и синтеза управления в условиях полной определенности. Отметим, что задача управления решается в преобразованных координатах (само преобразование не известно) и в этом смысле речь можно вести лишь о модальном управлении, например, о задаче стабилизации с заданными темпами сходимости.

В следующем параграфе рассмотрены вопросы представления систем (2.75) в совместной блочной форме управляемости и наблюдаемости. Сначала приведены результаты синтеза на основе понятия относительной степени, применение которых ограничивается требованием устойчивости нулевой динамики [72]. Затем показано, что если синтез на основе относительной степени не возможен, задача все-таки имеет решение за счет расширения пространства состояний.

2.6.2. Совместная блочная форма управляемости и наблюдаемости при параметрической неопределенности

В данном разделе рассмотрены возможности сведения систем с одним входом и с одним выходом к совместной блочной форме управляемости и наблюдаемости в условиях параметрической определенности.

Относительная степень и нули передачи.

Рассмотрим линейную динамическую систему вида:

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad y_1 = d^T x + cu. \quad (2.76)$$

Без ограничения общности система (2.76) полагается управляемой и наблюдаемой. В случае, когда параметры и компоненты вектора состояний системы (2.76) известны, многие задачи управления решаются с помощью выбора линейной обратной связи. Если для измерения доступна только выходная координата, то стандартная процедура синтеза систем управления заключается в получении оценок вектора состояний с помощью наблюдателя и последующего синтеза обратной связи по этим оценкам. Трудности, которые возникают в описанном подходе, заключаются в том, что для синтеза наблюдателя удобно использовать блочную (каноническую) форму наблюдаемости, а для синтеза обратной связи – блочную (каноническую) форму управляемости, которые в общем случае не совпадают. Для выяснения связи между каноническими формами управляемости и наблюдаемости введено понятие относи-

тельной степени ν . Применительно к системе (2.76) возможны следующие варианты.

Если $c \neq 0$, то $\nu = 0$. В этом случае выбором управления в виде $cu = -d^T x + \varphi(t)$ можно обеспечить равенство выходной переменной произвольной функции времени $y(t) = \varphi(t)$. Техническим требованием является устойчивость собственных движений системы (2.76).

Если $c = 0$, $d^T b \neq 0$, то $\nu = 1$. Тогда выбором управления в виде $d^T bu = -d^T Ax + \varphi(t)$ можно обеспечить поведение выходной переменной как выхода интегратора с произвольно заданной функцией времени на его входе $\dot{y} = \varphi(t)$. В этом случае техническим требованием является устойчивость оставшихся собственных движений системы (2.76) $(n - 1)$ -го порядка.

В общем случае относительная степень системы равна $\nu = i$, где $i = \min_j \{d^T A^{(j)} b\} \neq 0$, $j = \overline{1, n}$, и техническим требованием к реализуемости является устойчивость собственных движений системы $(n - \nu)$ -го порядка.

Таким образом, канонические формы управляемости и наблюдаемости совпадают только при выполнении условия $\nu = n$, и в этом случае система (2.76) неособой заменой переменных сводится к совместной канонической форме управляемости и наблюдаемости относительно выхода y_1 :

$$\dot{y}_i = y_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}; \quad \dot{y}_n = a^T y + b_n u, \quad (2.77)$$

где $y = \text{col}(y_1, \dots, y_n) \in R^n$, $a^T y = d^T A^{(n)} x$, $b_n = d^T A^{(n-1)} b$.

Система (2.77) удобна для синтеза обратной связи. Поскольку коэффициенты перед компонентами вектора состояния в последнем уравнении (которые можно назначать произвольным образом за счет выбора управлений) совпадают с характеристическим многочленом замкнутой системы, остается выбрать их таким образом, чтобы они совпадали с коэффициентами многочлена, задающего удовлетворительный переходный процесс. Что же касается решения задачи наблюдения, то то же преимущество имеет место благодаря тому, что система (2.77) представлена также и в блочной форме наблюдаемости.

Требование устойчивости нулевой динамики при синтезе систем управления на основе относительной степени представляется весьма сильным ограничением класса технически реализуемых систем. Наша последующая цель состоит в том, чтобы, используя метод расширения пространства состояний показать, что любая управляемая и наблюдаемая линейная SISO-система сводится к совместной канонической форме управляемости и наблюдаемости типа (2.77) и, следовательно, в полной мере могут быть решены модальные задачи наблюдения и управления.

Совместная форма наблюдаемости и управляемости SISO – систем.

Покажем, что наблюдаемая и управляемая система (2.76) приводится к совместной форме управляемости и наблюдаемости за счет расширения пространства состояний. Последовательно дифференцируя выходную переменную n раз, приведем систему (2.76) к блочной канонической форме наблюдаемости вида

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= d^T (Ax + bu) + cu = y_2, \quad \dot{y}_2 = d^T (A^2 x + Abu + b\dot{u}) + c\dot{u} = y_3, \dots, \\ \dot{y}_{n-1} &= d^T (A^{n-1} x + A^{n-2} bu + A^{n-3} b\dot{u} + \dots + Abu^{(n-3)} + bu^{(n-2)}) + cu^{(n-1)} = y_n, \\ \dot{y}_n &= d^T (A^n x + \sum_{i=0}^{n-1} A^i bu^{(n-1-i)}) + cu^{(n)}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Сформируем истинное управление как выход компенсатора, представляющего собой це-

почку из n последовательно связанных аperiodических звеньев вида

$$u = w_1; \dot{w}_i = -w_i + w_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}; \dot{w}_n = -w_n + g^T w + c\bar{u}, \quad (2.79)$$

где \bar{u} – новое управление, $w = \text{col}(w_1, \dots, w_n) \in R^n$, вектор $g^T \in R^n$ совпадает с аналогичным вектором в системе (2.80), описываемой ниже. Динамический компенсатор (2.79) позволяет заменить производные от истинных управлений высокого порядка в системе (2.78) линейными комбинациями компонент вектора состояний компенсатора [26]

$$u = w_1, \quad \dot{u} = -w_1 + w_2, \quad \ddot{u} = -w_2 + w_3, \dots, \quad u^{(n-1)} = -w_{n-1} + w_n, \quad u^{(n)} = -w_n + g^T w + \bar{u}.$$

С учетом (2.79) система (2.78) может быть записана в компактной форме вида

$$\dot{y}_i = y_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}; \dot{y}_n = a^T y + g^T w + c\bar{u}, \quad (2.80)$$

где $a^T = (a_1, \dots, a_n) \in R^n$, $g^T = (g_1, \dots, g_n) \in R^n$, $y = \text{col}(y_1, \dots, y_n) \in R^n$, $g_i = d^T (A^{n-i} - A^{n-i-1})b$, $A^0 = E$, $A^{-1} = 0$.

В силу наблюдаемости исходной системы преобразование $y = Hx$, где H – матрица наблюдаемости (1.2), является невырожденным, и, следовательно, система (2.80) эквивалентна исходной системе (2.76). Вектор-строка a^T в последнем уравнении (2.80) находится из соотношения $a^T = d^T A^n H^{-1}$. Если проводить синтез обратной связи на основе относительной степени, которая для системы (2.80) совпадает с размерностью исходной системы $\nu = n$, то, выбирая новое управление в виде

$$c\bar{u} = -g^T w + v, \quad (2.81)$$

получим совместную форму управляемости и наблюдаемости системы (2.76) относительно управления v

$$\dot{\bar{y}}_i = \bar{y}_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}; \dot{\bar{y}}_n = d^T \bar{y} + v. \quad (2.82)$$

Существенно, что после подстановки (2.81) в уравнения динамического компенсатора (2.79) в предположении $v = 0$, получим систему с заведомо устойчивой динамикой:

$$\dot{w}_i = -w_i + w_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}; \dot{w}_n = -w_n. \quad (2.83)$$

Отличительной чертой приведенного метода синтеза является тот факт, что нули передачи «переместились» из модели объекта управления в искусственно сформированный динамический компенсатор, нулевую динамику которого удастся сделать устойчивой.

Отметим, что, с одной стороны, собственно динамический компенсатор можно выбрать различными способами, лишь бы только его собственные движения были устойчивыми. С другой стороны, если относительная степень системы удовлетворяет соотношению $0 < \nu - 1 \leq n$ (т.е. в первые $(\nu - 1)$ уравнений системы (2.78) управление не входят), тот же результат достигается с использованием динамического компенсатора размерности $n - \nu$ (в частности, нулевой размерности, если $n = \nu$).

Сформулируем полученный результат в виде следующей теоремы.

Теорема 2.6. Для наблюдаемой и управляемой системы с одним входом и одним выходом

(2.76) с произвольной относительной степенью $0 \leq \nu \leq n$ существует устойчивый динамический компенсатор порядка $n - \nu$, такой, что исходная система приводится к совместной форме управляемости и наблюдаемости вида (2.79)–(2.80).

Если в системе (2.76) и, следовательно, в системе (2.78) предположить, что вектор состояния доступен для измерения, выбор управления в виде функции координат $v = \varphi_1(\bar{y})$ позволяет решить требуемые задачи управления в преобразованной системе (2.80). В случае, когда для измерения доступна только выходная координата y_1 , то для решения в полной мере задач управления необходимо получить оценки компонент вектора состояния, например, с помощью наблюдателя состояния.

2.6.3. Совместное решение задач идентификации и наблюдения

Вернемся к рассмотрению системы (2.76) в предположении, что все параметры постоянны и неизвестны, а система является наблюдаемой и управляемой. Согласно результатам параграфа 2.6.2, система (2.76) неособой (и неизвестной) заменой переменных может быть представлена в совместной блочной канонической форме наблюдаемости и управляемости вида (2.79) и (2.80). В отличие от представления (2.79) и (2.80) для синтеза компенсатора можно использовать только оценки параметров модели (2.76), т.е. будем полагать, что исходная система (2.76) представлена в виде

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= y_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}; \quad \dot{y}_n = a^T y + g^T w + c\bar{u}, \quad \dot{a} = 0, \quad \dot{g} = 0, \quad \dot{c} = 0, \\ \dot{w}_i &= -w_i + w_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}; \quad \dot{w}_n = -w_n + \hat{g}^T w + \hat{c}\bar{u}, \end{aligned} \quad (2.84)$$

где \hat{g} , \hat{c} – оценки параметров g , c , а управления вида (2.81) $\hat{c}\bar{u} = -\hat{g}^T w + v$ также могут быть сформированы только по оценочным параметрам. Если удастся получить сходящиеся оценки параметров, то можно использовать результаты параграфа 2.6.2. Поскольку само неособое преобразование системы (2.76) к виду (2.84) неизвестно, будем осуществлять синтез в преобразованной системе (2.84) и тогда, по крайней мере, задача стабилизации системы (2.84) и, следовательно, системы (2.76) будет решена.

На первом этапе предположив, что для измерения доступна координата y_1 , решим задачу оценивания компонент вектора состояний системы (2.84) с использованием наблюдателей состояний на скользящих режимах. Построим наблюдатель состояний вида

$$\dot{\bar{y}}_i = \bar{y}_{i+1} - v_i, \quad i = \overline{1, n-1}; \quad \dot{\bar{y}}_n = \hat{a}^T \bar{y} + \hat{g}^T w + \hat{c}\bar{u} - v_n, \quad (2.85)$$

и запишем уравнения в невязках

$$\dot{\varepsilon}_i = \varepsilon_{i+1} + v_i, \quad i = \overline{1, n-1}; \quad \dot{\varepsilon}_n = a^T \varepsilon + \varepsilon_a^T z + \varepsilon_g^T w + \varepsilon_c \bar{u} + v_n, \quad (2.86)$$

где $\varepsilon_i = y_i - \bar{y}_i$, $\varepsilon_a = a - \hat{a}$, $\varepsilon_g = g - \hat{g}$, $\varepsilon_c = c - \hat{c}$.

Формируя последовательно корректирующие воздействия в наблюдателе в виде разрывных функций, решим задачу стабилизации системы (2.86). На первом шаге сформируем корректирующие воздействия в виде $v_1 = -M_1 \text{sign} \varepsilon_1$. Тогда при достаточно большой $M_1 > 0 = \text{const}$ в первой подсистеме (2.86) возникнет скользящий режим по многообразию $\varepsilon_1 = 0$, а эквивалентное значение управления, получаемое как выход высокочастотного фильтра первого порядка $\mu_1 \dot{\tau}_1 = -\tau_1 + v_1$, будет равно $v_{1\text{eq}} = \tau_1 \approx \varepsilon_2$. Представим процедуру

первого шага в виде логической цепочки $v_1 = -M_1 \text{sign} \varepsilon_1 \Rightarrow \varepsilon_1 = 0$, $\mu_1 \dot{\tau}_1 = -\tau_1 + v_1$, $v_{1\text{eq}} = \varepsilon_2 = \tau_1$. Аналогично первому шагу представим последовательную процедуру синтеза наблюдателя (2.85) на последующих шагах $v_i = -M_i \text{sign}(v_{(i-1)\text{eq}}) \Rightarrow \varepsilon_i = 0$, $\mu_i \dot{\tau}_i = -\tau_i + v_i$, $v_{i\text{eq}} = \varepsilon_{i+1} = \tau_i$, $i = \overline{2, n}$. Таким образом, решается задача стабилизации системы (2.86) и, следовательно, переменные наблюдателя (2.85) теоретически за конечное время сходятся к одноименным компонентам вектора состояний системы (2.84). Отметим, что последний шаг описанной процедуры позволяет получить следующую оценку: $v_{\text{neq}} = a^T \varepsilon + \varepsilon_a^T \bar{y} + \varepsilon_g^T w + \varepsilon_c^T \bar{u}$ или с учетом $\varepsilon \rightarrow 0$

$$v_{\text{neq}} = \varepsilon_a^T \bar{y} + \varepsilon_g^T w + \varepsilon_c^T \bar{u}. \quad (2.87)$$

На втором этапе, используя идею работы [46], изложенную в разделе 1.3, построим идентификатор системы (2.84) (предположив, что вектор состояния доступен для измерения), позволяющий получить оценки неизвестных параметров при известном векторе состояния

$$\dot{\hat{a}} = \lambda v_n y^T, \quad \dot{\hat{g}} = \lambda v_n w^T, \quad \dot{\hat{c}} = \lambda v_n \bar{u}, \quad \lambda > 0, \quad (2.88)$$

где v_n – корректирующие воздействия наблюдателя (2.85). Уравнения в невязках $\hat{a} = a - \bar{a}$, $\hat{g} = g - \bar{g}$, $\hat{c} = c - \bar{c}$ в силу (2.85) и (2.88) имеют вид

$$\dot{\hat{a}} = -\lambda v_n y^T, \quad \dot{\hat{g}} = -\lambda v_n w^T, \quad \dot{\hat{c}} = -\lambda v_n \bar{u}, \quad \lambda > 0. \quad (2.89)$$

В обозначениях $z = \text{col}(y, w, \bar{u})$ и $\Delta C = (\hat{a}^T, \hat{g}^T, \hat{c})$ уравнения (2.89) с учетом (2.87) примут вид

$$\Delta \dot{C} = -\lambda \Delta C z. \quad (2.90)$$

Составим функцию Ляпунова в виде $V = \frac{1}{2} \text{tr}(\Delta C \Delta C^T) \geq 0$. Тогда в силу (2.90) получим $\dot{V} = -\lambda \text{tr}(\Delta C z z^T \Delta C^T) = -\lambda \|s\|^2$, $s = \Delta C z$. В известных предположениях о линейной независимости компонент вектора z и при условии, что для любого $\Delta C = \text{const}$ интеграл $\int_0^\infty \|s\|^2 dt$ расходится [46], выполняются соотношения $\lim_{t \rightarrow \infty} V = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta C = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{a} = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{g} = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{c} = 0$, что и доказывает сходимость оценок \hat{a} , \hat{g} , \hat{c} к значениям параметров векторов a , g , c .

Подводя итоги, отметим, что предложенные в данной главе методы каскадного синтеза наблюдателей состояния для линейных систем позволили решить некоторые не достаточно изученные задачи наблюдения и управления. В частности, для многомерных линейных систем (в отличие от классических подходов) удалось осуществить декомпозицию процедур синтеза наблюдателей на независимо решаемые подзадачи меньшей размерности.

Описанная в разделе 2.2 процедура приведения модели объекта управления к блочной форме наблюдаемости раскрывает структуру наблюдаемости систем, присущих им с учетом имеющихся каналов измерений. Анализ разрешимости задачи наблюдения в терминах блочной формы выглядит естественным и достаточно прозрачным, а формулировка результатов значительно облегчается по сравнению с формулировкой в терминах исходной задачи. Кон-

структивность описанной процедуры получения БФН по сравнению с классической методологией решения задач наблюдения заключается в том, что, во-первых, непосредственно выделяется наблюдаемое подпространство максимально возможной размерности, во-вторых, задача наблюдения подготавливается к каскадному синтезу.

В разделе 2.3 были рассмотрены два подхода к каскадному синтезу наблюдателей состояния, основанные на методах систем с разделяемыми движениями. Возможность декомпозиции основана на последовательном использовании входных переменных текущего блока в качестве фиктивных выходных переменных для последующего блока. В наблюдателе с непрерывными корректирующими воздействиями (параграф 2.3.1) декомпозиция на независимые подзадачи обеспечивается в асимптотике при бесконечно больших коэффициентах усиления. Этот в большей степени теоретический результат, указывает путь для построения наблюдателей состояния с конечными коэффициентами усиления, при которых возможно осуществление до предельной декомпозиции задачи синтеза и, в частности, в решении задачи оценивания компонент вектора состояния с заданной точностью при наличии неизвестных возмущающих воздействий, что продемонстрировано в параграфе 2.5.2.

Наблюдатели с разрывными корректирующими воздействиями (параграф 2.3.2), функционирующие в скользящем режиме, существенно отличаются от асимптотических наблюдателей состояния, описанных в разделе 1.1. Эти отличия состоят в том, что, во-первых, задача наблюдения решается за теоретически конечное время, во-вторых, выбор коэффициентов наблюдателя в предложенном подходе сводится к назначению в каждом блоке конечных амплитуд разрывных управлений на основе неравенств, что существенно упрощает вычисления и настройку. Существенно, что требование знания параметров предъявляется только к части оператора объекта управления. Следует отметить, что синтез задачи наблюдения осуществляется независимо от синтеза обратной связи в том случае, если имеется информация о каналах управления. В противном случае управляющие воздействия следует рассматривать как не измеряемые внешние возмущения. С практической точки зрения использование разрывных корректирующих воздействий в задачах наблюдения выгодно отличается от их использования в задачах управления, где при наличии неучтенных паразитных динамик в контуре обратной связи возникают автоколебания и реальный скользящий режим. Кроме того, в силу физических ограничений, формирование фиктивных управлений в виде разрывных функций, как правило, не возможно. В задачах наблюдения вычислительная среда формируется искусственно и не включает динамические неидеальности объекта управления, а на использование разрывных управлений не налагаются физические ограничения. Как следствие в наблюдателях состояния удается реализовать скользящие движения, близкие к идеальным.

Другой принцип декомпозиции задачи наблюдения (раздел 2.4), основанный на приведении модели объекта управления к форме наблюдаемости с наперед заданными матрицами на главной диагонали позволяет осуществить синтез наблюдателя с конечными коэффициентами. Отметим, что в данных построениях предполагается знание оператора объекта управления, что сужает рамки применимости данного подхода по сравнению с каскадным синтезом на основе метода разделения движения, описанного в разделе 2.3.

В разделе 2.5 предложен каскадный синтез задачи слежения при неполных измерениях. Использование методов систем с разделяемыми движениями позволило обеспечить декомпозицию процедур синтеза на независимо решаемые задачи меньшей размерности и решить задачу наблюдения за конечное время, а задачу слежения – с заданной точностью. Существенно, что в предложенных алгоритмах не налагаются дополнительные требования на гладкость функций задающих воздействий, требуется лишь их ограниченность вместе с производными первого порядка по модулю. Рассмотрена проблема обеспечения инвариантности при наличии внешних возмущений.

В разделе 2.6 предложен метод прямой идентификации параметров и (одновременно) решение задачи наблюдения в каноническом пространстве применительно к линейным системам с одним входом и одним выходом с использованием теории скользящих режимов.

Глава 3. КАСКАДНЫЙ СИНТЕЗ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

3.1. Постановка задачи

Важная с практической точки зрения задача оценивания вектора состояния при воздействии на систему внешних возмущений хорошо изучена для случаев, когда известна модель генератора возмущений. Как было показано в разделе 1.4, если параметры модели возмущения известны, то построение наблюдателя состояния для расширенной за счет динамической модели внешних возмущений системы позволяет получить асимптотически сходящиеся оценки всех неизмеряемых компонент при условии их наблюдаемости. Заметим, что в таком случае особенно актуальной становится проблема большой размерности, разрешить которую позволяют описанные в главе 2 каскадные процедуры.

Ситуация, когда модель внешних возмущений неизвестна, требует привлечения специальных подходов. В частности, синтезу систем с параметрической неопределенностью как объекта, так и модели внешних возмущений, посвящен ряд работ по адаптивному управлению [31].

Наша цель состоит в решении задачи наблюдения применительно к системам с аддитивным вхождением внешних возмущений без построения динамической модели возмущений. Рассмотрим линейную систему вида

$$\dot{x} = Ax + Q\eta + Bu, \quad y_1 = Dx, \quad (3.1)$$

где $x \in X \subset R^n$ – вектор состояния, $y_1 \in Y_1 \subset R^{\tilde{m}_1}$ – вектор измеряемых переменных, $\text{rank} D = \tilde{m}_1 < n$, $u \in U \subset R^p$ – вектор управляющих воздействий, $\eta \in R^q$ – вектор, характеризующий внешние, неконтролируемые возмущения, A, Q, B, D – известные матрицы с постоянными коэффициентами соответствующих размерностей. Предполагается, что компоненты вектора возмущений недоступны для измерения и являются произвольными детерминированными ограниченными по норме функциями времени:

$$\|\eta(t)\| \leq \Phi = \text{const} > 0, \quad \forall t \in [0; +\infty). \quad (3.2)$$

Принципиальное отличие системы (3.1)–(3.2) от обычно рассматриваемых в задачах наблюдения (например, в разделе 1.4) состоит в том, что в данном случае класс допустимых возмущений расширен за счет негладких функций времени, удовлетворяющих (3.2). Заметим, что к внешним возмущениям могут быть также отнесены остаточные члены от линеаризации оператора объекта управления и параметрические неопределенности входных каналов управления.

Особенность постановки задачи наблюдения в рассматриваемом случае заключается в том, что, даже предположив наблюдаемость пары матриц $\{D, A\}$ в системе (3.1), все компоненты вектора состояния в общем случае восстановить не удастся из-за наличия неизвестных возмущений. В связи с этим ставится задача выявления линейных комбинаций компонент вектора состояния максимально возможного ранга $\tilde{H}x$, $\tilde{m}_1 \leq \text{rank} \tilde{H} \leq n$, которые можно восстановить независимо от внешних возмущений. В результате такой постановки может быть решена, например, важная для практики задача оценивания заданного вектора регулируемых переменных Wx , если $\text{Im} W \in \text{Im} \tilde{H}$.

Величина $\text{rank} \tilde{H}$ зависит от тройки матриц $\{D, \{A, Q\}\}$. Поскольку в рассматриваемом случае (3.1)–(3.2) мы не налагаем требования гладкости на компоненты внешних возмуще-

ний η , постольку наблюдаемое подпространство тройки $\{D, \{A, Q\}\}$ соответствует базису только непрерывно дифференцируемых линейных комбинаций производных выходных сигналов.

Проанализируем принципиальную возможность решения поставленной задачи и составим систему, в которой дифференцирование внешних возмущений отсутствует:

$$y_1 = Dx, \quad \dot{y}_1 = DAx + DQ\eta + DBu, \quad y_2 = DAx, \\ \dot{y}_i = DA^i x + DA^{i-1}Q\eta + DA^{i-1}u, \quad y_{i+1} = DA^i x, \quad i = \overline{2, n-1}$$

или

$$\hat{y} = Hx + H_\eta \eta + H_u u, \quad (3.3)$$

где $\hat{y} = \text{col}(y_1(t), \dot{y}_1(t), \dot{y}_2(t), \dots, \dot{y}_{n-1}(t))$, $\hat{y} \in \hat{Y} \subset R^{mn}$, $\dim H = mn \times n$, $\dim H_\eta = mn \times q$,

$$H = \begin{pmatrix} D \\ DA \\ DA^2 \\ \vdots \\ DA^{n-1} \end{pmatrix}, \quad H_\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ DQ \\ DAQ \\ \vdots \\ DA^{n-2}Q \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что из-за наличия неизвестных возмущений η непосредственно вычислить производные \dot{y}_i , $i = \overline{2, n-1}$ в системе (3.3) не представляется возможным.

Для выявления наблюдаемого подпространства тройки $\{D, \{A, Q\}\}$ раскроем структуру системы (3.3) с точки зрения вхождения внешних возмущений. Представим множество состояний системы (3.3) в виде объединения двух непересекающихся множеств $\hat{Y} = Y_\eta \cup \tilde{Y}$, где множество Y_η составят компоненты, на которые непосредственно воздействуют внешние возмущения, а именно, подвекторы $\dot{y}_{\eta_1}, \dots, \dot{y}_{\eta_{(n-1)}}$, соответствующие базисным строкам матрицы H_η , $\dim y_{\eta_1} + \dots + \dim y_{\eta_{(n-1)}} = \text{rank} H_\eta$, и соответствующие им производные высших порядков. Расщепив таким образом систему (3.3), получим:

$$\hat{y} = \begin{pmatrix} y_\eta \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_b \\ \tilde{H} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} H_{b_\eta} \\ \bar{H}_\eta \end{pmatrix} \eta + \begin{pmatrix} H_{b_u} \\ \bar{H}_u \end{pmatrix} u, \quad (3.4)$$

Покажем, что множество \tilde{Y} соответствует наблюдаемому подпространству тройки $\{D, \{A, Q\}\}$. Поскольку в системе (3.4) $\text{rank} H_{b_\eta} = \text{rank} H_\eta$ по построению, существует неособое преобразование $\tilde{y} = \tilde{y} + \tilde{G}y_\eta$, $\tilde{y} \in \tilde{Y}$, которое позволяет аннулировать внешние возмущения во второй подсистеме (3.4), $\bar{H}_\eta + \tilde{G}H_{b_\eta} = 0$ и выявить линейные комбинации $\tilde{H}x$, $\tilde{H} = \bar{H} + \tilde{G}H_b$, на которые внешние возмущения не действуют:

$$\tilde{y} = \tilde{H}x + \tilde{H}u. \quad (3.5)$$

На рис. 3.1 схематично изображена структура системы (3.3) с точки зрения расщепления (3.4), т.е. указана дислокация компонент, составляющих множества $y_\eta \in Y_\eta$ и $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ (тонированное). Блоки исходной системы (3.3) расположены горизонтально, высота прямоугольников соответствует размерностям векторов, заштрихованные прямоугольники соответствуют базисным строкам матрицы H_η . Из рис. 3.1, в частности, следует, что если $\dim y_{\eta_1} = m_1$, то $\tilde{Y} = Y_1$, т.е. максимально возможное наблюдаемое подпространство вектора состояния совпадает с имеющимися измерениями.

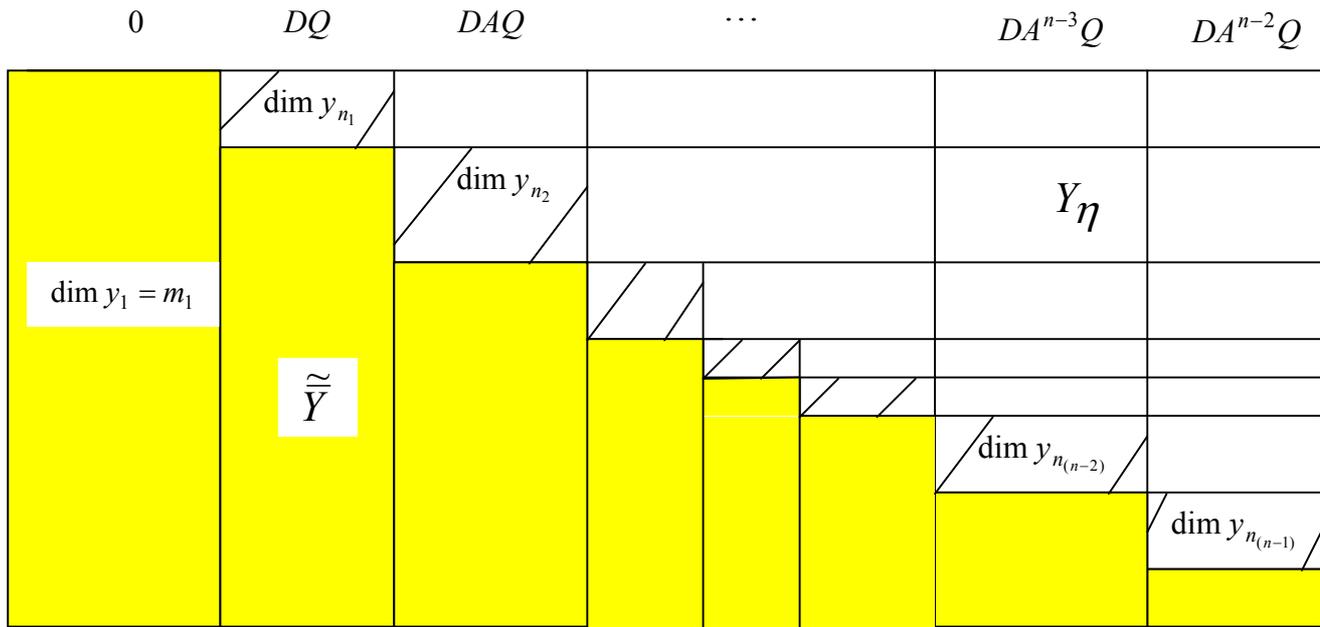


Рис. 3.1. Структура системы (3.4) с точки зрения воздействия внешних возмущений на каналы измерения

Тот факт, что в подсистеме (3.5) компоненты вектора \tilde{y} не зависят от внешних возмущений и входные сигналы $u(t)$ полагаются известными функциями времени, позволят дать следующее определение.

Определение 3.1. Тройка матриц $\{D, \{A, Q\}\}$ наблюдаема в терминах систем (3.1)–(3.2), если в представлении (3.5) $\text{rank} \tilde{H} = n$.

Из определения 3.1 следует, что если тройка $\{D, \{A, Q\}\}$ наблюдаема в указанном смысле, то значения $x(t)$ можно точно восстановить по значениям выхода y_1 и непрерывно дифференцируемым линейным комбинациям его производных до $(n-1)$ -го порядка в тот момент времени, когда проводится оценка состояния, поскольку система $x = \tilde{H}^{-1}(\tilde{y} - \tilde{H}_u u)$ имеет единственное решение. Например, в случае скалярного измерения $y = d^T x$, $y \in R$ сформулированное условие означает, что система будет наблюдаема, если внешние возмущения проявятся только в правой части дифференциального уравнения относительно $y^{(n)}$, т.е. если соответствующая матрица $H_\eta \equiv 0$ и $\text{rank} H = n$. Конечно, такой способ оценивания состояния, вытекающий из данного определения, неудовлетворителен, поскольку требует вычисления указанных компонент $(n-1)$ производных выхода. В то же время интуитивно понятно, что попытка восстановить неизмеряемые координаты вектора состояния системы (3.1)–(3.2) с помощью асимптотического наблюдателя с непрерывными корректирующими воздействиями приведет к решению задачи оценивания только с заданной точностью.

Мы предлагаем решение поставленной задачи в рамках каскадного подхода, в соответствии с которым на этапе конструктивного анализа структурных свойств наблюдаемости системы (3.1)–(3.2) разработана пошаговая процедура получения блочной формы наблюдаемости с учетом возмущений (БФНВ), в терминах которой сформулированы условия разрешимости задачи (раздел 3.2). Суть процедуры состоит в многократном дифференцировании вектора измеряемых переменных (заметим, что как и в разделе 2.2, речь идет не о реальном дифференцировании, а о получении соответствующих математических выражений) и выделении на каждом шаге с помощью неособых преобразований компонент вектора состояния, на которые непосредственно не воздействуют внешние возмущения. Заметим, что принцип пошагового вытеснения возмущений, в отличие от выше проведенного формального анализа, позволит существенно сократить количество преобразований. В разделе 3.3 на основе БФНВ строится наблюдатель состояния на скользящих режимах с разрывными корректирующими воздействиями, что позволит обеспечить инвариантность к ограниченным по норме неопределенностям и решить задачу оценивания неизмеряемых компонент вектора состояния за теоретически конечное время. Рассмотрена возможность оценивания линейных комбинаций внешних возмущений.

3.2. Конструктивный анализ структурных свойств наблюдаемости

Процедура приведения к блочной форме наблюдаемости с учетом возмущений (БФНВ).

Данная процедура состоит из пошаговых однотипных преобразований.

Шаг 1 (а). Представим исходную систему (3.1) в виде двух подсистем

$$\dot{y}_1 = A_{11}y_1 + D_1x_1 + Q_1\eta + B_1u, \quad \dot{x}_1 = A_{x_1}y_1 + A_{x_1}x_1 + Q_{x_1}\eta + B_{x_1}u, \quad (3.6)$$

где $y_1 \in R^{\tilde{m}_1}$, $x_1 \in R^{n-\tilde{m}_1}$, $\text{rank} Q_1 = q_1$, $\text{rank}(Q_1 \ D_1) = d_1$ с помощью неособого преобразования G_1 (2.5).

(б) Если $q_1 < d_1 < \tilde{m}_1$, то на $(\tilde{m}_1 - q_1)$ выходных переменных внешние возмущения не действуют в явном виде. Для их выявления требуется обнулить линейно зависимые строки матрицы Q_1 . С этой целью первый блок системы (3.6) расщепим на две подсистемы вида

$$\dot{y}_1^* = A_{11}^*y_1 + D_1^*x_1 + Q_1^*\eta + B_1^*u, \quad \dot{\hat{y}}_1 = \hat{A}_{11}y_1 + \hat{D}_1x_1 + \hat{Q}_1\eta + \hat{B}_1u, \quad (3.7)$$

где $y_1 = \text{col}(y_1^*, \hat{y}_1)$, $\dim \hat{y}_1 = \text{rank} \hat{Q}_1 = q_1$, $\dim y_1^* = \tilde{m}_1 - q_1$, и выполним неособое преобразование, аналогичное (2.7), а именно

$$G_1^* = \begin{pmatrix} I_{\tilde{m}_1 - q_1} & -Q_{11}^* \hat{Q}_{11}^{-1} \\ 0 & I_{q_1} \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

где $\hat{Q}_1 = (\hat{Q}_{11} \ \hat{Q}_{12})$, $\det \hat{Q}_{11} \neq 0$, $Q_1^* = (Q_{11}^* \ Q_{12}^*)$. Заметим, что если в невозмущенной системе (2.1) преобразование (2.7) не обязательно, то в данном алгоритме выполненное вытеснение неизвестных возмущений (3.8) является необходимым. В результате преобразования (3.8) компоненты вектора возмущений η исключаются из первой подсистемы (3.7), после расщепления которой получаем блочный вид

$$\dot{\tilde{y}}_1 = \tilde{A}_{11}y_1 + \tilde{D}_1x_1 + \tilde{B}_1u, \quad \dot{\bar{y}}_1 = \bar{A}_{11}y_1 + \bar{D}_1x_1 + \bar{B}_1u, \quad \dot{\hat{y}}_1 = \hat{A}_{11}y_1 + \hat{D}_1x_1 + \hat{Q}_1\eta + \hat{B}_1u, \quad (3.9)$$

где $G_1^* y_1 = \text{col}(\tilde{y}_1, \bar{y}_1, \hat{y}_1)$, $\dim \tilde{y}_1 = \text{rank} \tilde{D}_1 = d_1 - q_1 = \tilde{m}_2 \neq 0$, $\bar{y}_1 \in R^{\tilde{m}_1 - d_1}$.

Если $\tilde{m}_2 < n - \tilde{m}_1$, то переходим ко второму шагу, где преобразования, описанные на первом шаге, аналогичным образом применяются ко второй подсистеме (3.6), представленной в виде $\dot{\bar{x}}_1 = \bar{A}_{x_1} y_1 + \bar{A}_{x_1} \bar{x}_1 + \bar{Q}_{x_1} \eta + \bar{B}_{x_1} u$, $y_2 = \tilde{D}_1 \bar{x}_1$, где $y_2 \in R^{\tilde{m}_2}$, $x_1 \in R^{n - \tilde{m}_1}$ и

$$\bar{x}_1 = x_1 + \bar{G}_1 \hat{y}_1. \quad (3.10)$$

В преобразовании (3.10) матрица $\bar{G}_1 = -Q_{x_1} \hat{Q}_{11}^{-1}$ составлена из подматриц блочного представления

$$\begin{pmatrix} Q_{x_1} \\ \hat{Q}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{x_{11}} & Q_{x_{12}} \\ \hat{Q}_{11} & \hat{Q}_{12} \end{pmatrix}, \det \hat{Q}_{11(q_1 \times q_1)} \neq 0, \quad (3.11)$$

что позволяет исключить из дальнейших преобразований $\text{Im} \hat{Q}_1$.

Шаг i (а). Продолжая указанную процедуру, на i -м шаге система

$$\dot{\bar{x}}_{i-1} = \sum_{j=1}^{i-1} \bar{A}_{x_{i-1},j} y_j + \bar{A}_{x_{i-1}} \bar{x}_{i-1} + \bar{Q}_{x_{i-1}} \eta + \bar{B}_{x_{i-1}} u, \quad y_i = \tilde{D}_{i-1} \bar{x}_{i-1},$$

где $\dim y_i = \dim \tilde{y}_{i-1} = \text{rank} \tilde{D}_{i-1} = \tilde{m}_i \neq 0$, $\bar{x}_{i-1} = x_{i-1} + \bar{G}_{i-1} \hat{y}_{i-1}$, $\dim \bar{x}_{i-1} = n - \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{m}_j$, представима в виде двух подсистем

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^i A_{ij} y_j + D_i x_i + Q_i \eta + B_i u, \quad \dot{x}_i = \sum_{j=1}^i A_{x_{ij}} y_j + A_{x_i} x_i + Q_{x_i} \eta + B_{x_i} u, \quad (3.12)$$

где $\dim x_i = \dim \bar{x}_{i-1} - \tilde{m}_i$, $\text{rank} Q_i$, $\text{rank}(Q_i \ D_i) = d_i$, с помощью неособого преобразования G_i (2.14).

(б) Если $q_i < d_i < \tilde{m}_i$, то первый блок системы (3.9) с помощью преобразования

$$G_i^* = \begin{pmatrix} I_{\tilde{m}_i - q_i} & -Q_{i1}^* \hat{Q}_{i1}^{-1} \\ 0 & I_{q_i} \end{pmatrix},$$

где $\hat{Q}_i = (\hat{Q}_{i1} \ \hat{Q}_{i2})$, $\det \hat{Q}_{i1} \neq 0$, $Q_i^* = (Q_{i1}^* \ Q_{i2}^*)$, и перестановки строк представим в виде

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{y}}_i &= \sum_{j=1}^i \tilde{A}_{ij} y_j + \tilde{D}_i x_i + \tilde{B}_i u, \quad \dot{\bar{y}}_i = \sum_{j=1}^i \bar{A}_{ij} y_j + \bar{D}_i x_i + \bar{B}_i u, \\ \dot{\hat{y}}_i &= \sum_{j=1}^i \hat{A}_{ij} y_j + \hat{D}_i x_i + \hat{Q}_i \eta + \hat{B}_i u, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где $G_i^* y_i = \text{col}(\tilde{y}_i, \bar{y}_i, \hat{y}_i)$, $\dim \tilde{y}_i = \text{rank} \tilde{D}_i = d_i - q_i = \tilde{m}_{i+1} \neq 0$, $\bar{y}_i \in R^{\tilde{m}_i - d_i}$, $\dim \hat{y}_i = \text{rank} \hat{Q}_i = q_i$. Если $\tilde{m}_{i+1} < \dim x_i$, то сделав замену переменных, аналогичную (3.10)–(3.11), а именно,

$$\bar{x}_i = x_i + \bar{G}_i \hat{y}_i, \quad \bar{G}_i = -Q_{x_i} \hat{Q}_{i1}^{-1}, \quad \det \hat{Q}_{i1(q_i \times q_i)} \neq 0, \quad (3.14)$$

переходим к следующему шагу, и т.д.

В силу того, что на каждом шаге размерность вектора x_i понижается на величину $d_i - q_i \geq 1$, процедура закончится за конечное число шагов.

Предположим, что $(\nu - 1)$ -й шаг процедуры последний, т.е. в системе (3.12) при $i = \nu - 1$ выполнилось одно из двух условий окончания процедуры. При выполнении условия

$$d_{\nu-1} - q_{\nu-1} = n - \sum_{i=1}^{\nu-1} \tilde{m}_i \quad (*)$$

(или $\tilde{m}_\nu = \dim x_{\nu-1}$) и после неособых замен переменных $y_\nu = \tilde{D}_{\nu-1} \bar{x}_{\nu-1}$ (3.14), получим полную БФНВ системы (3.1), состоящую из ν блоков, каждый из которых, кроме последнего, в общем случае расщеплен на три подблока

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{y}}_i &= \sum_{j=1}^i \tilde{A}_{ij} y_j + y_{i+1} + \tilde{B}_i u, \quad \dot{\bar{y}}_i = \sum_{j=1}^{i+1} \bar{A}_{ij} y_j + \bar{B}_i u, \\ \dot{\hat{y}}_i &= \sum_{j=1}^{\nu} \hat{A}_{ij} y_j + \hat{Q}_i \eta + \hat{B}_i u, \quad i = \overline{1, \nu-1}; \quad \dot{y}_\nu = \sum_{j=1}^{\nu} A_{\nu j} y_j + Q_\nu \eta + B_\nu u, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где $G_i^* y_i = \text{col}(\tilde{y}_i, \bar{y}_i, \hat{y}_i)$, $\dim y_{i+1} = \dim \tilde{y}_i = \tilde{m}_{i+1} \neq 0$, $\bar{y}_i \in R^{\tilde{m}_i - d_i}$, $\dim \hat{y}_i = \text{rank} \hat{Q}_i = q_i$, $i = \overline{1, \nu-1}$, $y_\nu \in R^{\tilde{m}_\nu}$, $\sum_{i=1}^{\nu} \tilde{m}_i = n$, строки матриц \hat{Q}_i линейно независимы в силу преобразований (3.11). В частных случаях в представлении (3.15) могут отсутствовать третьи (при $q_i = 0$) или вторые (при $\tilde{m}_i - d_i = 0$) подблоки.

При выполнении условия

$$d_{\nu-1} - q_{\nu-1} = 0 \quad \text{и} \quad \dim \bar{x}_{\nu-1} > 0, \quad (**)$$

которое означает, что $\text{Im } D_{\nu-1} \subset \text{Im } Q_{\nu-1}$, получим неполную БФНВ вида

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{y}}_i &= \sum_{j=1}^i \tilde{A}_{ij} y_j + y_{i+1} + \tilde{B}_i u, \quad \dot{\bar{y}}_i = \sum_{j=1}^{i+1} \bar{A}_{ij} y_j + \bar{B}_i u, \\ \dot{\hat{y}}_i &= \sum_{j=1}^{\nu-1} \hat{A}_{ij} y_j + \hat{D}_i x_{\nu-1} + \hat{Q}_i \eta + \hat{B}_i u, \quad i = \overline{1, \nu-2}; \\ \dot{y}_{\nu-1} &= \sum_{j=1}^{\nu-1} A_{\nu-1, j} y_j + D_{\nu-1} x_{\nu-1} + Q_{\nu-1} \eta + B_{\nu-1} u, \\ \dot{x}_{\nu-1} &= \sum_{j=1}^{\nu-1} A_{x_{\nu-1}, j} y_j + A_{x_{\nu-1}} x_{\nu-1} + Q_{x_{\nu-1}} \eta + B_{x_{\nu-1}} u, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где $\text{rank} Q_{\nu-1} = \text{rank}(Q_{\nu-1} \ D_{\nu-1})$, $\dim x_{\nu-1} = n - \sum_{i=1}^{\nu-1} \tilde{m}_i > 0$, $\dim \tilde{y}_i = \dim y_{i+1} = \tilde{m}_{i+1}$.

Таким образом, к определению 3.1 о наблюдаемости линейных систем при аддитивном

вхождении внешних возмущений можно добавить эквивалентное утверждение в терминах описанных преобразований.

Теорема 3.1. *Линейная система (3.1)–(3.2) наблюдаема тогда и только тогда, когда она приводима к полной блочной форме наблюдаемости (3.15).*

Доказательство теоремы 3.1. Необходимость. Если система (3.1)–(3.2) является ненаблюдаемой, то в силу описанной процедуры получим неполную БФНВ (3.16). Следовательно, вектор состояния представляет собой два непересекающихся множества $X = Y \cup \bar{X}$, где наблюдаемое подпространство Y максимально возможной размерности образуют векторы

$y_i \in Y_i \subset R^{\tilde{m}_i}$, $i = \overline{1, \nu-1}$, а компоненты $x_{\nu-1}$, $\dim x_{\nu-1} = n - \sum_{i=1}^{\nu-1} \tilde{m}_i > 0$ образуют ненаблюдаемое подпространство \bar{X} .

В том, что большего добиться невозможно, легко убедиться, если представить уравнения относительно переменных $y_{\nu-1}$ в виде $\dot{y}_{\nu-1} = \sum_{j=1}^{\nu-1} A_{\nu-1,j} y_j +$

$+ Q_{\nu-1}(A_{\nu-1}x_{\nu-1} + \eta) + B_{\nu-1}u$, где матрица $A_{\nu-1}$ удовлетворяет соотношению $D_{\nu-1}A_{\nu-1} = Q_{\nu-1}$.

Тогда при произвольных возмущениях, например, $\eta(t) = -A_{\nu-1}x_{\nu-1} + \eta$, становится очевидна не наблюдаемость динамической подсистемы относительно переменных $x_{\nu-1}$.

Аналогичные утверждения о не наблюдаемости справедливы для всех третьих подблоков системы (3.16) относительно векторов \hat{y}_i в силу линейной независимости матриц \hat{Q}_i , $i = \overline{1, \nu-2}$.

Достаточность. Доказательством сформулированных в теореме 3.1 достаточных условий наблюдаемости является тот факт, что согласно построению система (3.15) состоит из линейно независимых комбинаций производных выхода, которые могут быть вычислены непосредственно независимо от внешних возмущений. С другой стороны, как будет показано в разделе 3.3, с помощью наблюдателя состояния на скользящих режимах за теоретически конечное время можно получить оценки состояния y_1, \dots, y_ν , которые связаны взаимно однозначной зависимостью с координатами исходной системы (3.1):

$$x = G_1^{-1} \left[\begin{array}{c} G_1^{*-1} \left(\begin{array}{c} \tilde{y}_1 \\ \bar{y}_1 \\ \hat{y}_1 \end{array} \right) \\ \\ \\ -G_{\eta_1} \hat{y}_1 + G_2^{-1} \left[\begin{array}{c} G_2^{*-1} \left(\begin{array}{c} \tilde{y}_2 \\ \bar{y}_2 \\ \hat{y}_2 \end{array} \right) \\ \\ \\ -G_{\eta_2} \hat{y}_2 + G_3^{-1} \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \\ \\ G_{\nu-1}^{*-1} \left(\begin{array}{c} \tilde{y}_{\nu-1} \\ \bar{y}_{\nu-1} \\ \hat{y}_{\nu-1} \end{array} \right) \\ \\ -G_{\eta_{(\nu-1)}} \hat{y}_{\nu-1} + G_\nu^{-1} [y_\nu] \end{array} \right] \end{array} \right] \end{array} \right], \quad (3.17)$$

где матрицы G_1, \dots, G_v невырожденные и их совместный ранг равен $n = \dim x$, $\text{rank} G_i^* = \dim y_i = \tilde{m}_i, i = \overline{1, v-1}$ по построению. Соответственно, параметры матриц, задействованных в преобразованиях G_i, G_i^*, G_{η_i} , должны быть точно известны.

Проведем аналогию пошаговой процедуры с представленным в разделе 3.1 формальным анализом наблюдаемости системы (3.1)–(3.2). Подвекторы $y_{\eta_1}, \dots, y_{\eta_{(n-1)}}$, соответствующие базисным строкам матрицы H_η , $\dim y_{\eta_i} + \dots + \dim y_{\eta_{(n-1)}} = \text{rank} H_\eta$, эквивалентны векторам $\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{v-1}$ в системе (3.15) и $\dim y_{\eta_i} = \dim \hat{y}_i = q_i$ по построению, а выполненные в ходе процедуры данного раздела неособые преобразования и получение полной формы (3.15) по сути означают отображение пространства состояний в прямую сумму $X = Y_1 \oplus Y_2 \oplus \dots \oplus Y_v$, где Y_i – A -инвариантные подпространства множества $\tilde{Y} = \text{Im} H \cap \text{Ker} H_\eta$, которым соответствуют векторы $y_i \in Y_i \subset R^{\tilde{m}_i}, i = \overline{1, v}, \tilde{m}_i$ – индексы наблюдаемости, v – показатель наблюдаемости системы (3.1)–(3.2) (или тройки $\{D, \{A, Q\}\}$).

Таким образом, схематично изображенная на рис. 3.1 структура системы (3.4) с точки зрения воздействия внешних возмущений на каналы измерения раскрывается в ходе пошаговых преобразований к БФНВ (3.15) и эквивалентна цепочке интеграторов (см. рис. 3.2).

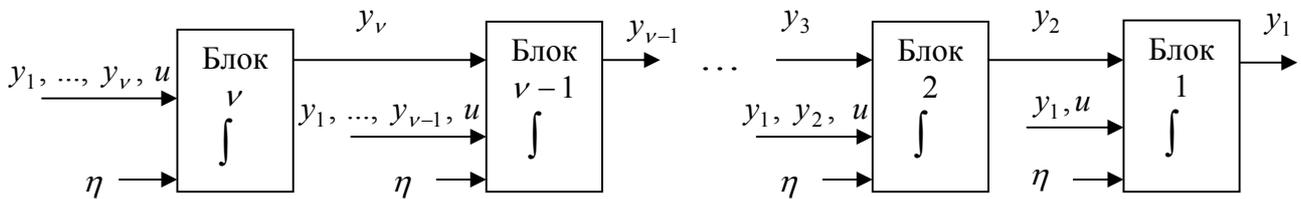


Рис. 3.2. Структурная схема системы (3.15)

Рекомендации разработчику. Для восстановления ненаблюдаемого подпространства системы (3.16) требуется организовать дополнительные измерения $y_{\text{доп}} = \hat{D}x_{v-1}$ так, чтобы тройка матриц $\{\hat{D}, \{A_{x_{v-1}}, Q_{x_{v-1}}\}\}$ была наблюдаема в указанном смысле. Конечно, в реальной системе возможности по измерению вектора состояния, как правило, ограничены (не все координаты могут быть измерены). С другой стороны, формально существует множество линейных комбинаций $y_1 = Dx$, при которых задача наблюдения может быть решена полностью, или, наоборот, ни одной. С учетом данных фактов на практике нецелесообразно ставить и решать обратную задачу, а именно, исходя из структуры конкретной модели объекта управления, с учетом каналов воздействия внешних возмущений определить линейные комбинации измеряемых переменных $y_1 = Dx$, при которых система полностью наблюдаема. В реальной системе следует перебрать все доступные комбинации выходных переменных (их число, как правило, конечно) и связанные с ними возможности по восстановлению вектора состояния, пользуясь процедурой, описанной в данном разделе. Выбирается та, которая наиболее полно удовлетворяет целям управления. Если измерительные возможности не позволяют полностью восстановить вектор состояния или необходимую линейную комбинацию Wx , то тогда требуются дополнительные исследования природы внешних возмущений и, как следствие, ослабление условий об их произвольности вплоть до описания некоторой динамической моделью.

В следующем разделе описана каскадная процедура синтеза наблюдателя состояния на скользящих режимах, за основу которого принимается полная БФНВ (3.15) в предположении, что исходная система (3.1)–(3.2) полностью наблюдаема.

3.3. Каскадный синтез наблюдателя состояния на скользящих режимах

Построим наблюдатель состояния, структура которого соответствует блочному представлению (3.15) (предполагается, что возмущения не доступны для измерения):

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{z}}_i &= \sum_{j=1}^i \tilde{A}_{ij} z_j + z_{i+1} + \tilde{B}_i u + \tilde{v}_i, \quad \dot{\bar{z}}_i = \sum_{j=1}^{i+1} \bar{A}_{ij} z_j + \bar{B}_i u + \bar{v}_i, \\ \dot{\hat{z}}_i &= \sum_{j=1}^{\nu} \hat{A}_{ij} z_j + \hat{B}_i u + \hat{v}_i, \quad i = \overline{1, \nu-1}; \quad \dot{z}_\nu = \sum_{j=1}^{\nu} A_{\nu j} z_j + B_\nu u + v_\nu,\end{aligned}\tag{3.18}$$

где $z = \text{col}(z_1, \dots, z_\nu) \in R^n$ – вектор состояния, $z_i = \text{col}(\tilde{z}_i, \bar{z}_i, \hat{z}_i) \in R^{\tilde{m}_i}$, $v = \text{col}(v_1, \dots, v_\nu)$ – вектор корректирующих воздействий наблюдателя, $v_i = \text{col}(\tilde{v}_i, \bar{v}_i, \hat{v}_i) \in R^{\tilde{m}_i}$, которые будем выбирать в классе разрывных функций так, чтобы решить задачу стабилизации системы уравнений относительно невязок $\varepsilon = y - z$, $\varepsilon = \text{col}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\nu) \in R^n$, $\varepsilon_i = \text{col}(\tilde{\varepsilon}_i, \bar{\varepsilon}_i, \hat{\varepsilon}_i) \in R^{\tilde{m}_i}$ записанных согласно (3.15) и (3.18) в виде

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\varepsilon}}_i &= \sum_{j=1}^i \tilde{A}_{ij} \varepsilon_j + \varepsilon_{i+1} - \tilde{v}_i, \quad \dot{\bar{\varepsilon}}_i = \sum_{j=1}^{i+1} \bar{A}_{ij} \varepsilon_j - \bar{v}_i, \quad \dot{\hat{\varepsilon}}_i = \sum_{j=1}^{\nu} \hat{A}_{ij} \varepsilon_j + \hat{Q}_i \eta - \hat{v}_i, \quad i = \overline{1, \nu-1}; \\ \dot{\varepsilon}_\nu &= \sum_{j=1}^{\nu} A_{\nu j} \varepsilon_j + Q_\nu \eta - v_\nu.\end{aligned}\tag{3.19}$$

Сформируем разрывные корректирующие воздействия в виде

$$\begin{aligned}\tilde{v}_1 &= \tilde{M}_1 \tilde{E}_1 \text{sign} \varepsilon_1, \quad \bar{v}_1 = \bar{M}_1 \bar{E}_1 \text{sign} \varepsilon_1, \quad \hat{v}_1 = \hat{M}_1 \hat{E}_1 \text{sign} \varepsilon_1; \\ \tilde{v}_i &= \tilde{M}_i \tilde{E}_i \text{sign} \tilde{v}_{(i-1)\text{eq}}, \quad \bar{v}_i = \bar{M}_i \bar{E}_i \text{sign} \tilde{v}_{(i-1)\text{eq}}, \quad \hat{v}_i = \hat{M}_i \hat{E}_i \text{sign} \tilde{v}_{(i-1)\text{eq}}, \quad i = \overline{2, \nu-1}; \\ v_\nu &= M_\nu \text{sign} \tilde{v}_{(\nu-1)\text{eq}},\end{aligned}\tag{3.20}$$

где $\tilde{E}_i = (I_{\tilde{m}_{i+1}} \ 0)$, $\dim \tilde{E}_i = \tilde{m}_{i+1} \times \tilde{m}_i$, $\bar{E}_i = (0 \ I_{\tilde{m}_i - d_i} \ 0)$, $\dim \bar{E}_i = (\tilde{m}_i - d_i) \times \tilde{m}_i$, $\hat{E}_i = (0 \ I_{q_i})$, $\dim \hat{E}_i = q_i \times \tilde{m}_i$, $i = \overline{1, \nu-1}$, $\text{sign}(\cdot)$ – векторы соответствующей размерности.

Амплитуды разрывных управлений (скалярные положительные параметры \tilde{M}_i , \bar{M}_i , \hat{M}_i , $i = \overline{1, \nu-1}$, M_ν) независимо выбираются в каждом блоке на основе достаточных условий возникновения скользящих режимов следующим образом

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_i^T \dot{\tilde{\varepsilon}}_i < 0 &\Rightarrow \tilde{M}_i > \left\| \sum_{j=1}^i \tilde{A}_{ij} \varepsilon_j + \varepsilon_{i+1} \right\|, \quad \bar{\varepsilon}_i^T \dot{\bar{\varepsilon}}_i < 0 \Rightarrow \bar{M}_i > \left\| \sum_{j=1}^{i+1} \bar{A}_{ij} \varepsilon_j \right\| \\ \hat{\varepsilon}_i^T \dot{\hat{\varepsilon}}_i < 0 &\Rightarrow \hat{M}_i > \left\| \sum_{j=1}^{\nu} \hat{A}_{ij} \varepsilon_j + \hat{Q}_i \eta \right\|, \quad i = \overline{1, \nu-1}; \\ \varepsilon_\nu^T \dot{\varepsilon}_\nu < 0 &\Rightarrow M_\nu > \left\| \sum_{j=1}^{\nu} A_{\nu j} \varepsilon_j + Q_\nu \eta \right\|.\end{aligned}\tag{3.21}$$

Реализуемость неравенств (3.21), т.е. существование конечных значений амплитуд, следует

из предположения об ограниченности невязок $\|\varepsilon_i(t)\| < F_i = \text{const} > 0, \forall t \in [0; \infty)$, а также внешних возмущений (3.2).

Как было показано в параграфе 2.3.2, в блоках замкнутой системы (3.19)–(3.21) последовательно возникают скользящие режимы на многообразиях $S_1 = \{\varepsilon_1 = 0\}$, $S_i = \{\varepsilon_i = 0 \cap S_{i-1}\}$, $i = \overline{2, \nu}$, и соотношения $\varepsilon_i = 0 \Leftrightarrow z_i = y_i$ обеспечиваются за конечное время $t_i > t_{i-1} > 0$.

Численные значения эквивалентных управлений находятся из соотношений $\dot{\tilde{\varepsilon}}_i = 0 \Rightarrow \tilde{v}_{ieq} = \varepsilon_{i+1}$ ($i = \overline{1, \nu-1}$). На практике их значения можно получить с выходов линейных фильтров первого порядка с малой постоянной времени

$$\mu_i \dot{\tau}_i = -\tau_i + \tilde{v}_i, \quad \tau_i \in R^{\tilde{m}_{i+1}}, \quad \lim_{\mu_i \rightarrow 0} \tau_i(t) = \tilde{v}_{ieq}(t), \quad i = \overline{1, \nu-1}. \quad (3.22)$$

Таким образом, с учетом соотношений (3.22) поставленная задача наблюдения решается за теоретически конечное время.

Замечание 3.1. С помощью наблюдателя на скользящих режимах (3.18)–(3.22) может быть дополнительно решена задача оценивания линейных комбинаций внешних возмущений при установке дополнительных фильтрующих устройств, на входы которых подаются разрывные корректирующие воздействия блоков системы (3.19), содержащих возмущения. Пусть в последнем блоке системы (3.19) $\text{rank} Q_\nu = q_\nu < \tilde{m}_\nu$. Тогда с помощью неособого преобразования G_ν^* данный блок представим в виде двух подсистем $\dot{\varepsilon}_\nu^* = \sum_{j=1}^{\nu} A_{\nu j}^* \varepsilon_j - \nu_\nu^*$,

$\dot{\hat{\varepsilon}}_\nu = \sum_{j=1}^{\nu} \hat{A}_{\nu j} \varepsilon_j + \hat{Q}_\nu \eta - \hat{\nu}_\nu$, где $\text{rank} \hat{Q}_\nu = q_\nu$. Установка дополнительных фильтров

$$\hat{\mu}_i \dot{\hat{\tau}}_i = -\hat{\tau}_i + \hat{\nu}_i, \quad \hat{\tau}_i \in R^{q_i}, \quad \lim_{\hat{\mu}_i \rightarrow 0} \hat{\tau}_i(t) = \hat{\nu}_{ieq}(t), \quad i = \overline{1, \nu} \quad (3.23)$$

позволяет получить за теоретически конечное время значения правых частей соответствующих дифференциальных уравнений, поскольку в соответствии с методом эквивалентного управления

$$\dot{\hat{\varepsilon}}_i = 0 \Rightarrow \hat{\nu}_{ieq} = \sum_{j=1}^{\nu} \hat{A}_{ij} \varepsilon_j + \hat{Q}_i \eta, \quad i = \overline{1, \nu}. \quad (3.24)$$

После стабилизации системы (3.19) (т.е. попадания на многообразие $S_\nu = \{\varepsilon_\nu = 0 \cap S_{\nu-1}\}$ в момент времени $t_\nu > t_{\nu-1}$) из выражений (3.24) получим восстановленные текущие значения линейных комбинаций внешних возмущений

$$\hat{Q}_i \eta(t) = \hat{\nu}_{ieq}(t), \quad i = \overline{1, \nu}, \quad t \geq t_\nu. \quad (3.25)$$

Кроме того, если совместный ранг матриц \hat{Q}_i ($i = \overline{1, \nu}$) равен размерности возмущений η , то можно непосредственно получить текущие значения всех компонент вектора возмущений, и впоследствии использовать их в цепи обратной связи для формирования компенсирующего управления. Следует отметить, что стандартные наблюдатели с непрерывной коррекцией не предоставляют такой возможности в сделанных предположениях о характере внешних возмущений (3.2). Использование каскадного подхода позволяет получить максимум информа-

ции о состоянии системы и среде ее функционирования по имеющимся каналам измерения.

Структурная схема i -го блока наблюдателя (3.18) с учетом (3.20), (3.22), (3.23), а также указанной в параграфе 2.3.2 (см. замечание 2.2) возможностью реализовать автополку амплитуд разрывных воздействий, представлена на рис. 3.3.

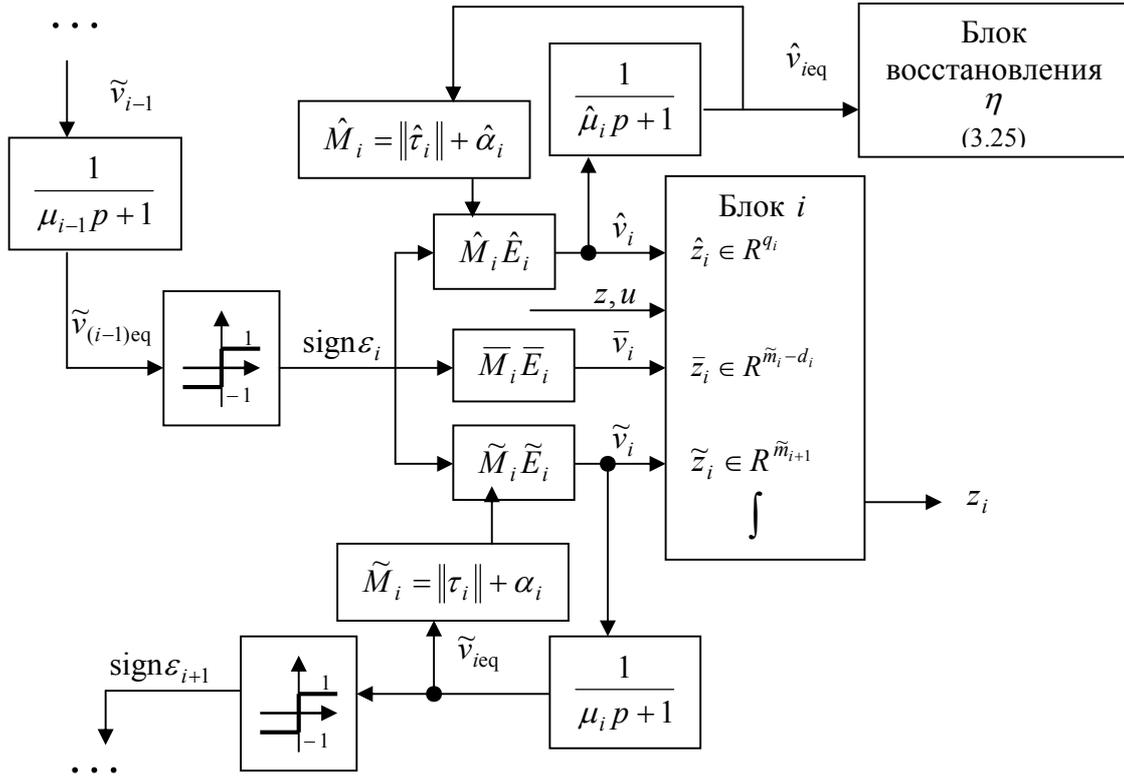


Рис. 3.3. Структурная схема i -го блока наблюдателя на скользящих режимах

Замечание 3.2. Задача наблюдения не измеряемых компонент вектора состояния может быть решена с помощью наблюдателя состояния на скользящих режимах пониженного порядка ($n - \bar{m}_1$), динамическая модель которого состоит из уравнений только для первых подблоков системы (3.15) и соответствующих фильтров:

$$\dot{\hat{z}}_1 = \tilde{A}_{11} (\hat{z}_1, \bar{y}_1, \hat{y}_1)^T + (\hat{z}_2, 0, 0)^T + \tilde{B}_1 u + \tilde{v}_1,$$

$$\dot{\hat{z}}_i = \tilde{A}_{i1} (\hat{z}_1, \bar{y}_1, \hat{y}_1)^T + \sum_{j=2}^i \tilde{A}_{ij} (\hat{z}_j, 0, 0)^T + (\hat{z}_{i+1}, 0, 0)^T + \tilde{B}_i u + \tilde{v}_i, \quad i = \overline{2, \nu-1}, \quad (3.26)$$

$$\mu_i \dot{\tau}_i = -\tau_i + \tilde{v}_i, \quad \tau_i \in R^{\bar{m}_i + 1}, \quad i = \overline{1, \nu-1}, \quad (3.27)$$

где $\tilde{z}_i \in R^{\bar{m}_i + 1}$, $i = \overline{1, \nu-1}$ – компоненты вектора состояния укороченного наблюдателя, измеряемые сигналы \bar{y}_1 , \hat{y}_1 подаются на наблюдатель непосредственно. С учетом первых подблоков системы (3.15) и (3.26) получим систему уравнений относительно невязок $\tilde{\varepsilon}_i = \bar{y}_i - \tilde{z}_i$, $\tilde{\varepsilon}_i \in R^{\bar{m}_i + 1}$:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\varepsilon}}_1 &= \tilde{A}_{11} (\tilde{\varepsilon}_1, 0, 0)^T + (\tilde{\varepsilon}_2, \bar{y}_2, \hat{y}_2)^T - \tilde{v}_1, \\ \dot{\tilde{\varepsilon}}_i &= \tilde{A}_{i1} (\tilde{\varepsilon}_1, 0, 0)^T + \sum_{j=2}^i \tilde{A}_{ij} (\tilde{\varepsilon}_j, \bar{y}_j, \hat{y}_j)^T + (\tilde{\varepsilon}_{i+1}, \bar{y}_{i+1}, \hat{y}_{i+1})^T - \tilde{v}_i, \quad i = \overline{2, \nu-1}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Приведем каскадную схему выбора корректирующих воздействий $\tilde{v}_i \in R^{\tilde{m}_{i+1}}$ ($i = \overline{1, \nu-1}$) наблюдателя (3.26)–(3.27), которые приводят к пошаговой стабилизации системы (3.28) и позволяют полностью решить задачу наблюдения.

Шаг 1. В первой подсистеме (3.28) при $\tilde{v}_1 = \tilde{M}_1 \text{sign} \tilde{\varepsilon}_1$ за конечное время $\tilde{t}_1 > 0$ возникнет скользящий режим на многообразии $\tilde{S}_1 = \{\tilde{\varepsilon}_1 = 0\} \Rightarrow \tilde{z}_1 = \tilde{y}_1$ при выполнении условия $\tilde{\varepsilon}_1^T \dot{\tilde{\varepsilon}}_1 < 0 \Rightarrow \tilde{M}_1 > \| \tilde{A}_{11}(\tilde{\varepsilon}_1, 0, 0)^T + (\tilde{\varepsilon}_2, \bar{y}_2, \hat{y}_2)^T \|$. По значениям эквивалентного управления $\dot{\tilde{\varepsilon}}_1 = 0 \Rightarrow \tilde{v}_{1\text{eq}} = (\tilde{\varepsilon}_2, \bar{y}_2, \hat{y}_2)^T$, полученным с помощью фильтра (3.27), где $\lim_{\mu_1 \rightarrow 0} \tau_1(t) = \tilde{v}_{1\text{eq}}(t)$, вычисляем соотношения $\tilde{\varepsilon}_2 = \tilde{E}_2 \tilde{v}_{1\text{eq}}$, $\bar{y}_2 = \bar{E}_2 \tilde{v}_{1\text{eq}}$, $\hat{y}_2 = \hat{E}_2 \tilde{v}_{1\text{eq}}$, которые служат для формирования комбинированных управлений в последующих блоках.

Шаг i , $i = 2, \nu-1$. В i -й подсистеме (3.28) сформируем комбинированное управление, которое состоит из разрывной и компенсирующей составляющей $\tilde{v}_i = \tilde{M}_i \tilde{E}_i \text{sign} \tau_{i-1} - \sum_{j=2}^i \tilde{A}_{ij} (0, \bar{E}_j \tau_{j-1}, \hat{E}_j \tau_{j-1})^T$. Тогда, пренебрегая собственной динамикой фильтрующих устройств (3.27) и с учетом предыдущих построений, получим замкнутую систему $\dot{\tilde{\varepsilon}}_i = \tilde{A}_{ii}(\tilde{\varepsilon}_i, 0, 0)^T + (\tilde{\varepsilon}_{i+1}, \bar{y}_{i+1}, \hat{y}_{i+1})^T - \tilde{M}_i \text{sign} \tilde{\varepsilon}_i$, в которой за конечное время $\tilde{t}_i > \tilde{t}_{i-1}$ возникнет скользящий режим на многообразии $\tilde{S}_i = \{\tilde{\varepsilon}_i = 0 \cap \tilde{S}_{i-1}\} \Rightarrow \tilde{z}_i = \tilde{y}_i$ при выполнении условия $\tilde{\varepsilon}_i^T \dot{\tilde{\varepsilon}}_i < 0 \Rightarrow \tilde{M}_i > \| \tilde{A}_{ii}(\tilde{\varepsilon}_i, 0, 0)^T + (\tilde{\varepsilon}_{i+1}, \bar{y}_{i+1}, \hat{y}_{i+1})^T \|$. По значениям эквивалентного управления $\dot{\tilde{\varepsilon}}_i = 0 \Rightarrow \tilde{v}_{i\text{eq}} = (\tilde{\varepsilon}_{i+1}, \bar{y}_{i+1}, \hat{y}_{i+1})^T$, полученным из соотношения $\lim_{\mu_i \rightarrow 0} \tau_i(t) = \tilde{v}_{i\text{eq}}(t)$, вычисляем $\tilde{\varepsilon}_{i+1} = \tilde{E}_{i+1} \tilde{v}_{i\text{eq}}$, $\bar{y}_{i+1} = \bar{E}_{i+1} \tilde{v}_{i\text{eq}}$, $\hat{y}_{i+1} = \hat{E}_{i+1} \tilde{v}_{i\text{eq}}$.

Таким образом, задача наблюдения будет решена за теоретически конечное время $\tilde{t}_{\nu-1} > \tilde{t}_{\nu-2}$ после попадания системы (3.28) на многообразие $\tilde{S}_{\nu-1} = \{\tilde{\varepsilon}_{\nu-1} = 0 \cap \tilde{S}_{\nu-2}\}$. При этом текущие значения неизмеряемых компонент \tilde{y}_i восстанавливаются с помощью наблюдателя (3.26), а \bar{y}_i, \hat{y}_i рассчитываются через значения координат фильтрующих устройств (3.27). Заметим, что при построении укороченного наблюдателя (3.26)–(3.27) возможность восстановить линейные комбинации внешних возмущений η отсутствует. В то же время, появляется возможность еще больше расширить класс допустимых возмущений, сняв ограничение (3.2), и считать часть компонент вектора внешних возмущений произвольными измеримыми функциями.

Кратко сформулируем полученные результаты.

Каскадный метод распространен на решение задачи наблюдения применительно к линейным многомерным системам при действии внешних неконтролируемых возмущений. По сравнению с известными результатами расширен класс допустимых возмущений за счет негладких функций времени.

С целью анализа структуры наблюдаемости разработаны процедуры приведения исходных систем к блочным формам наблюдаемости с выделением наблюдаемого подпространства вектора состояния максимально возможной размерности, в терминах данных преобразований сформулированы ранговые условия наблюдаемости линейных систем при наличии внешних возмущений (раздел 3.2).

Разработан алгоритм каскадного синтеза наблюдателя состояния на скользящих режимах, с помощью которого решается задача оценивания не только неизмеряемых компонент вектора состояния, но и линейных комбинаций компонент вектора возмущений за теоретически конечное время (раздел 3.3).

Часть 2. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

В последнее время задача наблюдения нелинейных систем изучалась рядом авторов [53, 62, 73, 75] на основе алгебры Ли. Суть этого подхода заключается в локальном покомпонентном преобразовании нелинейной модели объекта управления к квазилинейному каноническому виду, на основе которого синтезируется асимптотический наблюдатель состояния с непрерывными корректирующими воздействиями. При этом, как правило, необходимо точное знание оператора объекта управления и решение задачи синтеза высокой размерности.

В нижеследующих главах разработаны каскадные процедуры синтеза задачи наблюдения для нелинейных многомерных моделей объектов управления широкого класса. В основу процедур положен блочный подход и метод разделения движений, продемонстрированный в первой части на примере линейных систем. В отличие от известных канонических представлений вводится блочная форма наблюдаемости с максимальным сохранением нелинейных свойств модели объекта управления. Используемый в рамках каскадного синтеза наблюдателей состояния методологический аппарат позволяет конструктивно исследовать структурные свойства локальной наблюдаемости нелинейных систем и разработать прямые декомпозиционные процедуры синтеза наблюдателей состояния.

Глава 4. КАСКАДНЫЙ СИНТЕЗ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ СОСТОЯНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

4.1. Постановка задачи

Рассматривается задача наблюдения многомерной нелинейной динамической системы вида

$$\dot{x} = f(x, u), \quad y = h(x, u), \quad (4.1)$$

где $x(t) \in X \subset R^n$ – вектор состояния, $y(t) \in Y \subset R^m$ – вектор выходных (измеряемых) переменных, $u(t) \in U \subset R^p$ – вектор управляющих воздействий. Особенность объекта (4.1) по сравнению с обычно рассматриваемыми разомкнутыми или аффинными системами заключается в нелинейном вхождении управления, компоненты которого полагаются известными функциями времени. Параметры вектор-функций $f(x, u)$, $h(x, u)$ известны, предположения о возможной неопределенности оператора объекта управления (4.1) будут сделаны по ходу изложения.

Наша цель состоит в распространении на нелинейные системы методик каскадного подхода к решению задачи наблюдения, описанных в главах 2, 3 для линейных систем.

Сформулированная теорема 1.1 о ранговых условиях наблюдаемости линейных систем, по сути, означает, что если система наблюдаема, то можно восстановить вектор состояния $x(t)$ по значениям выходных сигналов $y(t)$ и их производных $\dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)$ в тот момент времени, когда проводится оценка состояния, т.е. матрица наблюдаемости H (1.2) имеет полный ранг.

Для формулировки аналогичной теоремы применительно к системе (4.1) требуется предварительно наложить ряд ограничений на класс рассматриваемых нелинейных систем. Вначале мы сформулируем общие требования, а позже покажем возможности их ослабления в зависимости от структуры наблюдаемости системы (4.1).

Потребуем, чтобы в системе (4.1) строки вектор-функции $y = h(x, u)$ были непрерывно

дифференцируемы n раз относительно всех своих аргументов в некоторой открытой области G изменения переменных x, u , где $G \subset R^{n+p}$, $G = X \oplus U$; G, X, U – открытые множества. Данное требование содержит в себе необходимость существования непрерывных частных производных до $(n-1)$ -го порядка строк вектор-функции $f(x, u)$ и n производных компонент вектора $u(t)$, и в том числе означает существование и единственность для системы (4.1) решения задачи Коши для $\forall(x_0, u_0) \in G$.

Замечание 4.1. Непосредственное вычисление производных высших порядков по управляющим воздействиям $u(t)$ может оказаться затруднительным на практике. В частности, при использовании разрывных управляющих воздействий в цепи обратной связи вообще исключается возможность их дифференцирования. С целью не ограничивать класс допустимых управлений классом многократно дифференцируемых функций, сразу дополним модель объекта управления (4.1) динамическим компенсатором с устойчивыми собственными движениями

$$\dot{w}_i = -w_i + w_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \dot{w}_n = -w_n + \bar{u}, \quad (4.2)$$

где $w_i \in R^p$, $i = \overline{1, n}$, вектор $\bar{u} \in R^p$ трактуется как новое управление, представленное любыми измеримыми функциями времени. Система (4.2), где $u = w_1$, порождает производные управления до n -го порядка: $u^{(i)} = \dot{w}_i$, $i = \overline{1, n}$. В дальнейшем изложении будут фигурировать обозначения типа

$$w_i^* = \text{col}(w_1, w_2, \dots, w_{i+1}), \quad i = \overline{0, n}, \quad (4.3)$$

где $w_{n+1} = \bar{u}$, $w_0^* = w_1$, $w_i^* \in \Omega_i^* \subset R^{p(i+1)}$, $\Omega_i^* \subset \Omega_{i+1}^*$. Структурная схема системы (4.2) показана на рис. 4.1.

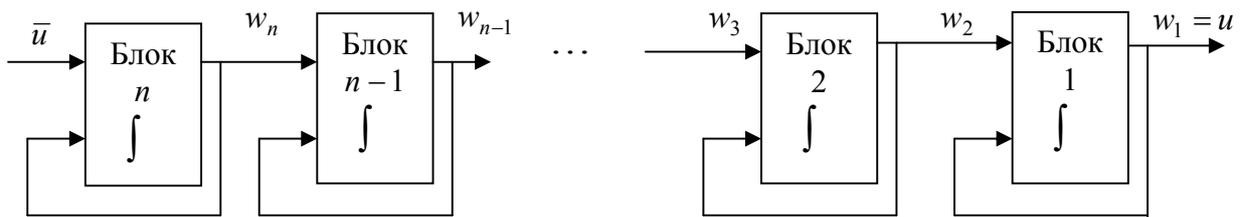


Рис. 4.1. Структурная схема динамического компенсатора (4.2)

В сделанных предположениях и с учетом обозначений (4.2)–(4.3) сформируем систему относительно выхода y и его полных производных до $(n-1)$ -го порядка:

$$y = h(x, w_0^*), \quad \dot{y} = \frac{\partial h(x, w_0^*)}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial h(x, w_0^*)}{\partial w_0^*} \dot{w}_0^* = h_1(x, w_1^*),$$

$$\ddot{y} = \frac{\partial h_1(x, w_1^*)}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial h_1(x, w_1^*)}{\partial w_1^*} \dot{w}_1^* = h_2(x, w_2^*),$$

...

$$y^{(n-1)} = \frac{\partial h_{n-2}(x, w_{n-2}^*)}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial h_{n-2}(x, w_{n-2}^*)}{\partial w_{n-2}^*} \dot{w}_{n-2}^* = h_{n-1}(x, w_{n-1}^*),$$

или

$$y_p = \begin{pmatrix} h(x, w_0^*) \\ h_1(x, w_1^*) \\ \dots \\ h_{n-1}(x, w_{n-1}^*) \end{pmatrix} = H(x, w_{n-1}^*), \quad (4.4)$$

где $y_p = \text{col}(y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}) \in Y_p \subset R^{mn}$, компоненты вектора $w_{n-1}^*(t) \in R^{p(n-1)}$ полагаются известными свободными переменными.

Сформулируем теорему о ранговых условиях наблюдаемости нелинейных систем указанного класса, по аналогии с теоремой 1.1 для линейных систем.

Теорема 4.1. *Нелинейная система (4.1)–(4.2) наблюдаема в точке $(x_0, w_{(n-1)_0}^*) \in G^* \subset R^{n+pn}$, $G^* = X \oplus \Omega_{n-1}^*$ тогда и только тогда, когда укороченная функциональная матрица J_h частных производных отображения H (4.4) по компонентам вектора состояния $x = \text{col}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$, где $x_i \in R$, полного ранга, т.е. $\text{rank} J_h(x_0, w_{(n-1)_0}^*) = n$, где*

$$J_h = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h}{\partial x_n} \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial h_{n-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_{n-1}}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad \dim J_h = mn \times n. \quad (4.5)$$

Доказательство теоремы 4.1. Сформулированные условия удовлетворяют теореме о неявной функции [11] и означают, что в сделанных предположениях систему (4.4) можно однозначно разрешить относительно x , во всяком случае в некоторой открытой окрестности V точки $(x_0, w_{(n-1)_0}^*)$. Действительно, пусть J_b – базисный минор матрицы J_h , т.е. $\dim J_b = n \times n$, $\det J_b(V(x_0, w_{(n-1)_0}^*)) \neq 0$. Соответствующие ему n строк матрицы H образуют биективное (т.е. взаимно однозначное и сюръективное), регулярное по x отображение H_b . Отсюда следует, что обратное отображение H_b^{-1} также биективно и регулярно по x , и компоненты вектора x локально однозначно определяются из системы

$$x = H_b^{-1}(y_p, w_{n-1}^*). \quad (4.6)$$

В теореме 4.1. сформулированы условия локальной наблюдаемости системы (4.1). Если предположения теоремы выполняются на открытом множестве $G^* \subset R^{n+pn}$, то система считается глобально наблюдаемой.

Следует отметить, что в отличие от линейных систем, где свойство наблюдаемости всегда глобально и не зависит от управления u , в рассматриваемой нелинейной системе (4.1) в

общем случае ранг функциональной матрицы J_h (4.5) зависит от вектора состояний динамического компенсатора (4.2) и управлений. Например, если одномерной системой $\dot{x} = f(x, u)$, $x \in R$ порождается выход $y = h(x, u) = xu$, то, очевидно, что условие наблюдаемости нарушается при $u \equiv 0$, поскольку при $\forall x$ в точке $(x, 0)$ $\partial h / \partial x = 0$, и выражение $x = y / u$ не определено. Следовательно, в конкретных приложениях из допустимого множества $\Omega_{n-1}^* \subset R^{pn}$ может быть выделено подмножество $\tilde{\Omega}_{n-1} \subset R^{pn}$ изображающих точек $w_{(n-1)}^* \in \tilde{\Omega}_{n-1} \subset \Omega_{n-1}^*$, порождаемых системой (4.2), для которых функциональная матрица $J_h(x_0, w_{(n-1)}^*)$ (4.5) в заданной точке фазового пространства $x = x_0$ имеет ранг, равный n .

На рис. 4.2 схематично представлена структура функциональной матрицы (4.5), блоки которой $\partial h / \partial x$, $\partial h_1 / \partial x$, ..., $\partial h_{n-1} / \partial x$ выстроены горизонтально. Каждый блок содержит m строк (выделены пунктирными линиями), которые соответствуют частным производным по x упорядоченных компонент вектора $y = \text{col}(y_1, \dots, y_m) \in R^m$. Тонированные прямоугольники состоят из m_i строк, $i = \overline{1, \nu}$ ($m_i \geq m_{i+1}$, $\nu \leq n$), которые соответствуют строкам блока $\partial h_{i-1} / \partial x$, участвующим в образовании базисного минора J_b функциональной матрицы J_h , т.е. $\text{rank} J_h = m_1 + \dots + m_\nu$, $\text{rank}\{\partial h / \partial x\} = m_1 \leq m$.

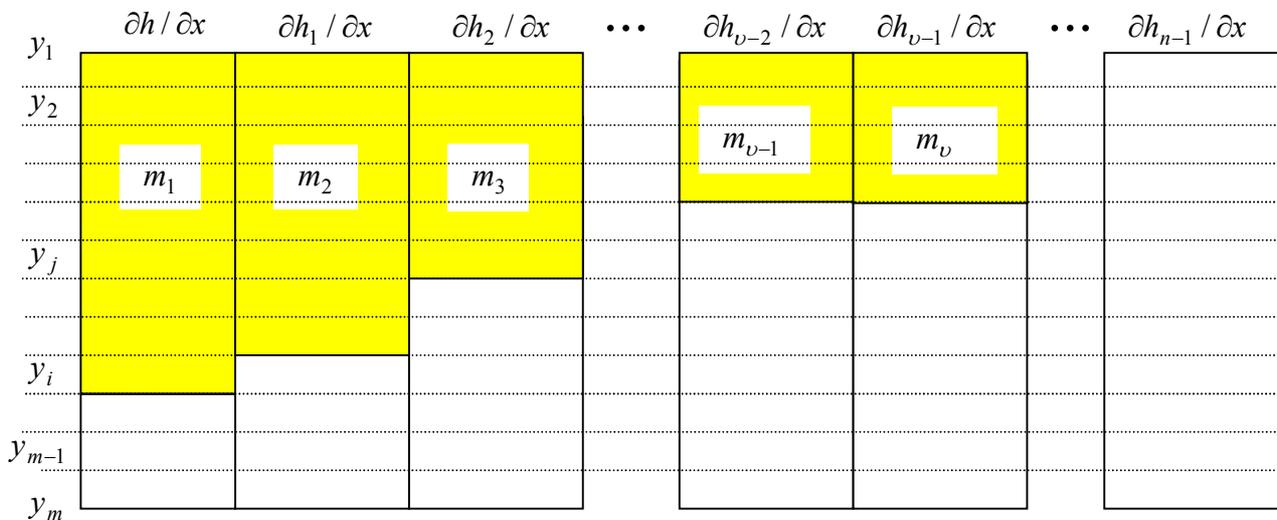


Рис. 4.2. Структура наблюдаемости нелинейной системы (4.1)

По аналогии с линейными системами здесь m_i – индексы наблюдаемости, ν – показатель наблюдаемости нелинейной системы (4.1). Очевидно, что если $\sum_{i=1}^{\nu} m_i = n$, то система наблюдаема. В противном случае имеет место ненаблюдаемое подпространство вектора состояния размерности $n - \sum_{i=1}^{\nu} m_i > 0$, и задачу наблюдения невозможно решить в полной мере без дополнительных измерений.

Показанная на рис. 4.2 структура наблюдаемости нелинейной системы (4.1) является основанием для ослабления первоначальных требований к существованию частных производных высших порядков вектор-функции $h(x, w_0)$ и несколько расширяет класс рассматриваемых систем. Например, для схемы, изображенной на рис. 4.2, при $m > 1$, $\nu < n$ и

$\sum_{i=1}^{\nu} m_i = n$, строки $h(x, w_0)$, соответствующие компонентам y_1, y_2 , должны быть непрерывно дифференцируемы ν раз; строка, соответствующая y_j , четыре раза; y_i – два раза; y_{m-1}, y_m – один раз. Данное требование включает в себя существование соответствующих частных производных до $(\nu-1)$ -го порядка вектор-функции $f(x, u)$ и ν производных управления $u(t)$ (или наличие ν блоков динамического компенсатора (4.2)). Данные требования могут быть выявлены только в процессе формирования базисного минора J_b .

Как было показано в предыдущих главах, при решении задачи наблюдения в рамках каскадного подхода не требуется априорной проверки условий разрешимости задачи, сформулированных в теореме 4.1. В разделе 4.2 для нелинейной системы (4.1) разработана конструктивная пошаговая процедура локальных диффеоморфных преобразований к блочно-канонической форме наблюдаемости (БКФН). По построению структура БКФН будет эквивалентна базису функциональной матрицы (4.5), что позволит непосредственно выделить наблюдаемое подпространство максимальной размерности и избежать избыточных преобразований. На основе БКФН в разделе 4.3 разработаны декомпозиционные процедуры синтеза наблюдателей состояния с различными типами корректирующих воздействий, выбор которых обуславливается предположениями о параметрической неопределенности оператора объекта управления.

4.2. Конструктивный анализ структурных свойств наблюдаемости

Процедура приведения нелинейной системы к блочно-канонической форме наблюдаемости (БКФН).

Задача приведения к БКФН для нелинейной системы, записанной в общем виде (4.1), решается локально в некоторой открытой окрестности изображающей точки $V(x_0, w_{0_0}^*) \in G_0 \subset R^{n+p}$ с пошаговыми заменами координат и расширением пространства состояний $V(x_0, w_{1_0}^*) \in G_1 \subset R^{n+2p}, \dots, V(x_0, w_{(\nu-1)_0}^*) \in G_{\nu-1} \subset R^{n+p\nu}$, где точка $(x_0, w_{i_0}^*) \in G_i \subset R^{n+p(i+1)}$ является проекцией точки $(x_0, w_{(i+1)_0}^*) \in G_{i+1} \subset R^{n+p(i+2)}$ на множество G_i . Справедливость нижеследующих преобразований для открытого множества $G_{\nu-1} \subset R^{n+p\nu}$ или некоторого его подмножества может быть установлена на практике при рассмотрении конкретных систем.

Шаг 1. а) Пусть $\text{rank}\{\partial h / \partial x\} = m_1 \neq 0$ в $V(x_0, w_{0_0}^*) \in G \subset R^{n+p}$. Если $m_1 < m$, то перестановкой строк представим вектор выходных переменных в виде

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{h}_0(x, w_0^*) \\ \bar{h}_0(x, w_0^*) \end{pmatrix},$$

где $\dim y_1 = \text{rank}\{\partial \tilde{h}_0 / \partial x\} = m_1$, компоненты вектора $\bar{y} \in R^{m-m_1}$ отбрасываются. В свою очередь вектор состояния системы (4.1) может быть расщеплен так $x = \text{col}(\bar{x}_1, x_1)$, $\bar{x}_1 \in R^{m_1}$, $x_1 \in R^{n-m_1}$, чтобы $\text{rank}\{\partial \tilde{h}_0(\bar{x}_1, x_1, w_0^*) / \partial \bar{x}_1\} = m_1$. В силу теоремы о неявной функции отображение \tilde{h}_0 инъективно (взаимно однозначно) относительно \bar{x}_1 , что

позволяет выполнить диффеоморфную замену переменных $x = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$, $y_1 \in Y_1 \subset R^{m_1}$, $\bar{x}_{1_0} \rightarrow y_{1_0}$. После дифференцирования и обратной подстановки $\bar{x}_1 = \tilde{h}_0^{-1}(y_1, x_1, w_0^*)$ система (4.1) будет представлена в виде двух подсистем

$$\dot{y}_1 = h_1(y_1, x_1, w_1^*), \quad \dot{x}_1 = f_1(y_1, x_1, w_0^*). \quad (4.7)$$

Правомерность отбрасывания вектора \bar{y} подтверждается тем, что при подстановке в вектор-функцию $\bar{h}_0(\bar{x}_1, x_1, w_0^*)$ выражения $\bar{x}_1 = \tilde{h}_0^{-1}(y_1, x_1, w_0^*)$ получим в рассматриваемой точке $\text{rank}\{\partial \bar{h}_0(y_1, x_1, w_0^*) / \partial \bar{x}_1\} = 0$, поскольку $\text{rank}\{\partial \bar{h}_0 / \partial \bar{x}_1\} \neq 0$ означает, что $\text{rank}\{\partial h / \partial x\} > m_1$, что противоречит сделанным предположениям.

Замечание 4.2. Если условие $\text{rank}\{\partial h / \partial x\} = m_1 \neq 0$ выполняется на всем допустимом множестве изменения переменных x, w_0^* , то замена переменных $\bar{x}_1 \rightarrow y_1$ глобальна и инъективна в каждой точке этого множества (обратное, вообще говоря, неверно [11]).

б) Пусть в первом уравнении системы (4.7) выполняется условие $\text{rank}\{\partial h_1 / \partial x_1\} = m_2 \neq 0$. Если $m_2 < m_1$, то для выделения строк, правые части которых участвуют в образовании базисного минора J_b функциональной матрицы J_h (4.5), расцепим первое уравнение системы (4.7) на две подсистемы относительно переменных $y_1 = \text{col}(\tilde{y}_1, \bar{y}_1)$ так $\dot{\tilde{y}}_1 = \tilde{h}_1(y_1, x_1, w_1^*)$, $\dot{\bar{y}}_1 = \bar{h}_1(y_1, x_1, w_1^*)$, чтобы $\dim \tilde{y}_1 = \text{rank}\{\partial \tilde{h}_1 / \partial x_1\} = m_2$, $\bar{y}_1 \in R^{m_1 - m_2}$.

Если $m_2 < \dim x_1$, то переходим ко второму шагу, на котором описанные преобразования аналогичным образом применяются ко второму уравнению (4.7), для которого в качестве фиктивного выхода принимается вектор $y_2 = \tilde{h}_1(y_1, x_1, w_1^*)$, $\dim y_2 = \dim \tilde{y}_1 = m_2$, и т.д.

Шаг i. Продолжая указанную процедуру, на i -ом шаге, с учетом сделанных замен переменных, рассматривается система

$$\dot{x}_{i-1} = f_{i-1}(y_1, \dots, y_{i-1}, x_{i-1}, w_{i-2}^*), \quad y_i = \tilde{h}_{i-1}(y_1, \dots, y_{i-1}, x_{i-1}, w_{i-1}^*), \quad (4.8)$$

где вектор $y_i \in Y_i \subset R^{m_i}$ трактуется как фиктивный выход, и в силу процедуры $\text{rank}\{\partial \tilde{h}_{i-1} / \partial x_{i-1}\} = m_i \neq 0$, $\bar{x}_{j_0} \rightarrow y_{j_0}$, $j = \overline{1, i-1}$, $m_i < \dim x_{i-1} = n - m_1 - \dots - m_{i-1}$.

а) Представим вектор состояния системы (4.8) в виде $x_{i-1} = \text{col}(\bar{x}_i, x_i)$, $\bar{x}_i \in R^{m_i}$, $x_i \in R^{n - m_1 - \dots - m_i}$ так, чтобы $\text{rank}\{\partial \tilde{h}_{i-1}(y_1, \dots, y_{i-1}, \bar{x}_i, x_i, w_{i-1}^*) / \partial \bar{x}_i\} = m_i$. Поскольку отображение \tilde{h}_{i-1} инъективно относительно \bar{x}_i , то после диффеоморфной замены переменных $\bar{x}_i \rightarrow y_i$, дифференцирования и обратной подстановки $\bar{x}_i = \tilde{h}_{i-1}^{-1}(y_1, \dots, y_i, x_i, w_{i-1}^*)$ система (4.8) представима в виде

$$\dot{y}_i = h_i(y_1, \dots, y_i, x_i, w_i^*), \quad \dot{x}_i = f_i(y_1, \dots, y_i, x_i, w_{i-1}^*). \quad (4.9)$$

Существенно, что после подстановки $\bar{x}_i = \tilde{h}_{i-1}^{-1}(y_1, \dots, y_i, x_{i-1}, w_{i-1}^*)$ в выражение предыдущего шага $\dot{\bar{y}}_{i-1} = \bar{h}_{i-1}(y_1, \dots, y_{i-1}, \bar{x}_i, x_i, w_{i-1}^*)$ получим $\text{rank}\{\partial \bar{h}_{i-1} / \partial x_i\} = 0$.

б) Пусть в первом уравнении системы (4.9) выполняется условие $\text{rank}\{\partial h_i / \partial x_i\} = m_{i+1} \neq 0$. Если $m_{i+1} < m_i$, то расцепим первое уравнение системы (4.9)

$$\dot{\tilde{y}}_i = \tilde{h}_i(y_1, \dots, y_i, x_i, w_i^*), \quad \dot{\bar{y}}_i = \bar{h}_i(y_1, \dots, y_i, x_i, w_i^*) \quad (4.10)$$

так, чтобы $y_i = \text{col}(\tilde{y}_i, \bar{y}_i)$, $\dim \tilde{y}_i = \text{rank}\{\partial \tilde{h}_i / \partial x_i\} = m_{i+1}$, $\bar{y}_i \in R^{m_i - m_{i+1}}$. Если $m_{i+1} < \dim x_i$, то переходим к следующему шагу, на котором описанные преобразования аналогичным образом применяются ко второму уравнению (4.9), для которого в качестве фиктивного выхода принимается вектор $y_{i+1} = \tilde{h}_i(y_1, \dots, y_i, x_i, w_i^*)$, $y_{i+1} \in Y_{i+1} \subset R^{m_{i+1}}$, и т.д.

На каждом шаге размерность исходного вектора состояния уменьшается, и данная процедура закончится за конечное число шагов. Предположим, что на $(\nu - 1)$ -м шаге в системе

$$\dot{y}_{\nu-1} = h_{\nu-1}(y_1, \dots, y_{\nu-1}, x_{\nu-1}, w_{\nu-1}^*), \quad \dot{x}_{\nu-1} = f_{\nu-1}(y_1, \dots, y_{\nu-1}, x_{\nu-1}, w_{\nu-2}^*), \quad (4.11)$$

где $\dim y_{\nu-1} = m_{\nu-1}$, $\dim x_{\nu-1} = n - m_1 - \dots - m_{\nu-1}$, $\text{rank}\{\partial h_{\nu-1} / \partial x_{\nu-1}\} = m_\nu$, выполняется одно из условий (*) или (**) окончания процедуры, приводимые ниже.

Если в системе (4.11) выполнено условие

$$m_\nu = n - \sum_{i=1}^{\nu-1} m_i \quad (*)$$

или $m_\nu = \dim x_{\nu-1}$, то исходная система (4.1) является локально наблюдаемой и приводится к полной БКФН, состоящей из ν блоков, каждый из которых, кроме последнего, в общем случае расщеплен на два подблока

$$\dot{\tilde{y}}_i = y_{i+1}, \quad \dot{\bar{y}}_i = \bar{h}_i(y^*, w_{\nu-1}^*), \quad i = \overline{1, \nu-1}; \quad \dot{y}_\nu = \bar{h}_\nu(y^*, w_\nu^*), \quad (4.12)$$

где $y^* = \text{col}(y_1, \dots, y_\nu) \in Y^* \subset R^n$, $y_i = \text{col}(\tilde{y}_i, \bar{y}_i)$, $\dim y_{i+1} = \dim \tilde{y}_i = m_{i+1} \neq 0$, $\bar{y}_i \in R^{m_i - m_{i+1}}$, $i = \overline{1, \nu-1}$. В частном случае, когда размерности блоков равны, т.е. $\dim \bar{y}_i = 0$, $i = \overline{1, \nu-1}$ и $n = \nu \cdot m_1$, форма (4.12) принимает квазилинейный блочный вид

$$\dot{y}_i = y_{i+1}, \quad i = \overline{1, \nu-1}, \quad \dot{y}_\nu = \bar{h}_\nu(y_1, \dots, y_\nu, w_\nu^*). \quad (4.13)$$

Если в системе (4.11) выполнено условие

$$m_\nu = 0 \quad (**)$$

при $\dim x_{\nu-1} \neq 0$, то процедура заканчивается, и в новых переменных исходная система (4.1) принимает вид не полной блочно-наблюдаемой формы:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{y}}_i &= y_{i+1}, \quad \dot{\bar{y}}_i = \bar{h}_i(y_1, \dots, y_{\nu-1}, x_{\nu-1}, w_{\nu-2}^*), \quad i = \overline{1, \nu-2}; \\ \dot{y}_{\nu-1} &= h_{\nu-1}(y_1, \dots, y_{\nu-1}, x_{\nu-1}, w_{\nu-1}^*), \quad \dot{x}_{\nu-1} = f_{\nu-1}(y_1, \dots, y_{\nu-1}, x_{\nu-1}, w_{\nu-2}^*), \end{aligned} \quad (4.14)$$

где компоненты вектора $x_{\nu-1}$, $\dim x_{\nu-1} = n - m_1 - m_2 - \dots - m_{\nu-1} > 0$ составляют ненаблюдаемое подпространство. Соответственно переменные $y_i \in R^{m_i}$ ($i = \overline{1, \nu-1}$) составляют наблюдаемое подпространство максимально возможной размерности $m_1 + m_2 + \dots + m_{\nu-1} < n$.

Таким образом, к теореме 4.1 можно добавить эквивалентное утверждение в терминах

описанных преобразований.

Теорема 4.2. *Нелинейная система (4.1)–(4.2) локально наблюдаема тогда и только тогда, когда она приводима к полной блочно-канонической форме наблюдаемости (4.12) в точке $(x_0, w_{(v-1)_0}^*) \in G_{v-1} \subset R^{n+p\nu}$ и ее проекциях $(x_0, w_{i_0}^*) \in G_i \subset R^{n+p(i+1)}$, $i = \overline{v-2}, 0$.*

Доказательство теоремы 4.2. Необходимость. Если в результате описанных преобразований по условию (**) будет получена неполная форма наблюдаемости (4.14), где по построению $\text{rank}\{\partial \bar{h}_i / \partial x_{v-1}\} = 0$, $i = \overline{1, v-2}$, $\text{rank}\{\partial h_{v-1} / \partial x_{v-1}\} = 0$, то это означает, что указанные матрицы частных производных нулевые и их дальнейшее дифференцирование по x_{v-1} также приведет к нулевым матрицам. Следовательно, ни одна из компонент вектора x_{v-1} не может быть однозначно выражена из уравнений относительно выхода и его производных $\dot{y}_i = \bar{h}_i(y_1, \dots, y_{v-1}, x_{v-1}, w_{v-2}^*)$, $i = \overline{1, v-2}$, $\dot{y}_{v-1} = h_{v-1}(y_1, \dots, y_{v-1}, x_{v-1}, w_{v-1}^*)$, и вектор x_{v-1} , $\dim x_{v-1} = n - m_1 - m_2 - \dots - m_{v-1} > 0$ составляет ненаблюдаемое подпространство.

Достаточность. В полученной по условию (*) полной форме наблюдаемости (4.12) компоненты вектора $y^* \in R^n$ (которые составляют координаты вектора $y_p = \text{col}(y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}) \in R^{mn}$, соответствующие базисному минору J_b функциональной матрицы J_h (4.5)) связаны взаимно однозначными зависимостями $y_i = \tilde{h}_{i-1}(y_1, \dots, y_{i-1}, \bar{x}_i, x_i, w_{i-1}^*)$ ($i = \overline{1, v}$) с координатами исходной системы $y_i \leftrightarrow \bar{x}_i$, $x = \text{col}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_v) \in R^n$, $\bar{x}_i \in R^{m_i}$, поскольку $\text{rank}\{\partial \tilde{h}_{i-1} / \partial \bar{x}_i\} = m_i$, $m_1 + \dots + m_v = n$, и $x = (\bar{x}_1, x_1)$, $x_{v-1} = \bar{x}_v$, $x_i = \text{col}(\bar{x}_{i+1}, x_{i+1})$, $\dim x_i = n - m_1 - \dots - m_i$, по индукции $x_i = \text{col}(\bar{x}_{i+1}, \bar{x}_{i+2}, \dots, \bar{x}_v)$, $i = \overline{1, v-2}$. Непосредственно вычислив соответствующие производные выхода или восстановив их с помощью наблюдателя состояния (см. следующие разделы), координаты исходной системы (4.1)–(4.2) локально однозначно находятся с помощью последовательных обратных преобразований

$$\bar{x}_v = \tilde{h}_{v-1}^{-1}(y_1, \dots, y_v, w_{v-1}^*), \quad \bar{x}_i = \tilde{h}_{i-1}^{-1}(y_1, \dots, y_i, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_v, w_{i-1}^*), \quad i = \overline{v-1, 1}, \quad (4.15)$$

если параметры вектор-функций \tilde{h}_i известны. В случае, когда система (4.15) не имеет аналитического решения, для определения координат исходной системы следует воспользоваться численными методами [10].

Структурная схема БКФН (4.12) представлена на рис. 4.3.

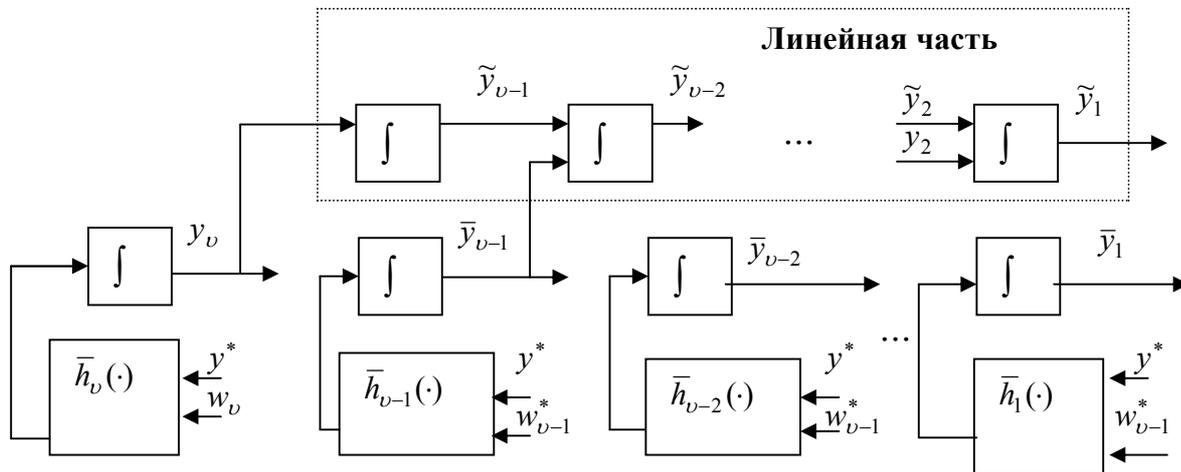


Рис. 4.3. Структурная схема БКФН (4.12)

Полученный квазилинейный блочный вид отличается от известных канонических представлений с использованием алгебры Ли более компактным, блочным принципом организации. Количество интеграторов в блоках равно размерности векторов $\tilde{y}_i, \bar{y}_i, i = \overline{1, \nu-1}, y_\nu$ и соответствует структурной схеме наблюдаемости, показанной на рис.4.1.

Логическая последовательность неособых преобразований вектора состояния системы (4.1) в БКФН (4.12) изображена на рис. 4.4.

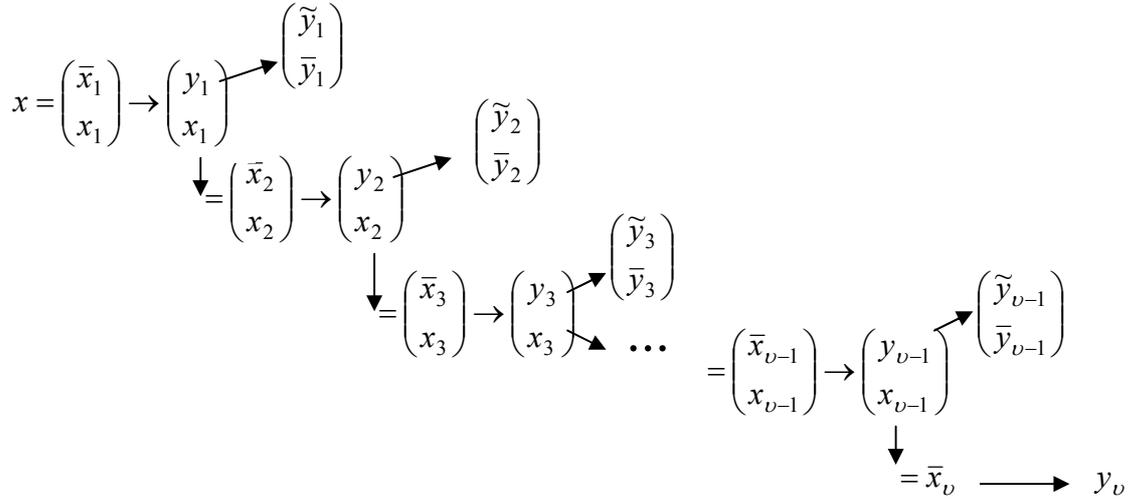


Рис. 4.4. Последовательность неособых преобразований к БКФН

4.3. Каскадный синтез наблюдателя состояния на скользящих режимах

Разработанные методики каскадного синтеза наблюдателей состояния на основе метода разделения движений в классе систем с глубокими обратными связями (см. параграф 2.3.1) и разрывными управлениями (см. параграф 2.3.2) для линейных систем могут быть распространены и на рассматриваемый нелинейный случай. Как было отмечено, непосредственное использование алгоритмов с глубокими обратными связями представляет скорее теоретический интерес, поэтому в данном разделе мы ограничимся построением наблюдателя на скользящих режимах. Возможности практической реализации наблюдателя с глубокими обратными связями в допредельной ситуации будут рассмотрены в разделе 4.4.

Наблюдатель состояния имеет блочную структуру, соответствующую представлению системы (4.1) в виде БКФН (4.12):

$$\dot{\tilde{z}}_i = z_{i+1} + \tilde{v}_i, \quad \dot{\bar{z}}_i = \bar{h}_i(z^*, w_{\nu-1}^*) + \bar{v}_i, \quad i = \overline{1, \nu-1}; \quad \dot{z}_\nu = \bar{h}_\nu(z^*, w_\nu^*) + v_\nu, \quad (4.16)$$

где $z^* = \text{col}(z_1, z_2, \dots, z_\nu) \in R^n$ – вектор состояния, $z_i = \text{col}(\tilde{z}_i, \bar{z}_i)$, $i = \overline{1, \nu-1}$; $\dim z_i = \dim u_i = \dim v_i = m_i$, $i = \overline{1, \nu}$; $v_i = \text{col}(\tilde{v}_i, \bar{v}_i)$, $i = \overline{1, \nu-1}$, v_ν – разрывные корректирующие воздействия наблюдателя, которые выбираются далее так, чтобы обеспечить стабилизацию невязок $\varepsilon_i = y_i - z_i$, поведение которых согласно (4.12), (4.16) описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\varepsilon}}_i &= \varepsilon_{i+1} - \tilde{v}_i, \quad \dot{\bar{\varepsilon}}_i = \bar{h}_i(z^* + \varepsilon^*, w_{\nu-1}^*) - \bar{h}_i(z^*, w_{\nu-1}^*) - \bar{v}_i, \quad i = \overline{1, \nu-1}; \\ \dot{\varepsilon}_\nu &= \bar{h}_\nu(z^* + \varepsilon^*, w_\nu^*) - \bar{h}_\nu(z^*, w_\nu^*) - v_\nu. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Вектор состояния системы (4.17) $\varepsilon^* = \text{col}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\nu) \in R^n$ состоит из подвекторов $\varepsilon_i = \text{col}(\tilde{\varepsilon}_i, \bar{\varepsilon}_i) \in R^{m_i}$, где $\varepsilon_i \in R^{m_{i+1}}$, $\bar{\varepsilon}_i \in R^{m_i - m_{i+1}}$, $i = \overline{1, \nu-1}$. В каждом подблоке системы (4.17) размерность вектора состояния совпадает с размерностью корректирующих воздействий, что является предпосылкой независимого решения элементарных задач синтеза (стабилизации).

Предполагается, что область изменения переменных ε^* открыта и ограничена в какой-либо норме $\|\varepsilon^*\| < F^* = \text{const}$, и в системе (4.17) выполняются следующие ограничения:

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_i\| < F_i, \quad i = \overline{1, \nu}; \quad \|\Delta \bar{h}_i\| &= \|\bar{h}_i(z^* + \varepsilon^*, w_{\nu-1}^*) - \bar{h}_i(z^*, w_{\nu-1}^*)\| < \bar{F}_i, \quad i = \overline{1, \nu-1}; \\ \|\Delta \bar{h}_\nu\| &= \|\bar{h}_\nu(z^* + \varepsilon^*, w_\nu^*) - \bar{h}_\nu(z^*, w_\nu^*)\| < \bar{F}_\nu, \end{aligned} \quad (4.18)$$

где F_i, \bar{F}_i – известные константы.

В наблюдателе на скользящих режимах осуществляется декомпозиция задачи синтеза на независимо решаемые подзадачи меньшей размерности при пошаговом формировании разрывных корректирующих воздействий в каждом блоке, и задача стабилизации системы (4.17) решается за теоретически конечное время. Для упрощения изложения нижеследующий алгоритм представлен в блочном виде без покомпонентной детализации.

Сформируем разрывные корректирующие воздействия в виде

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1 &= \tilde{M}_1 \tilde{E}_1 \text{sign} \varepsilon_1, \quad \bar{v}_1 = \bar{M}_1 \bar{E}_1 \text{sign} \varepsilon_1; \\ \tilde{v}_i &= \tilde{M}_i \tilde{E}_i \text{sign} \tilde{v}_{(i-1)\text{eq}}, \quad \bar{v}_i = \bar{M}_i \bar{E}_i \text{sign} \tilde{v}_{(i-1)\text{eq}}, \quad i = \overline{2, \nu-1}; \quad v_\nu = M_\nu \text{sign} \tilde{v}_{(\nu-1)\text{eq}}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

где $\tilde{E}_i = (I_{m_{i+1}} \ 0)$, $\dim \tilde{E}_i = m_{i+1} \times m_i$, $\bar{E}_i = (0 \ I_{m_i - m_{i+1}})$, $\dim \bar{E}_i = (m_i - m_{i+1}) \times m_i$, $i = \overline{1, \nu-1}$, $\text{sign}(\cdot)$ – векторы соответствующих размерностей. Амплитуды разрывных корректирующих воздействий выбираются с учетом (4.17)–(4.18) независимо в каждом блоке на основании достаточных условий возникновения скользящих режимов

$$\tilde{\varepsilon}_i^T \dot{\tilde{\varepsilon}}_i < 0 \Rightarrow \tilde{M}_i > F_{i+1}, \quad \bar{\varepsilon}_i^T \dot{\bar{\varepsilon}}_i < 0 \Rightarrow \bar{M}_i > \bar{F}_i, \quad i = \overline{1, \nu-1}; \quad \varepsilon_\nu^T \dot{\varepsilon}_\nu < 0 \Rightarrow M_\nu > \bar{F}_\nu. \quad (4.20)$$

В первом блоке замкнутой системы (4.17)–(4.20) возникнет скользящий режим по многообразию $\bar{S}_1 = \{\bar{\varepsilon}_1 = 0\}$, $\tilde{S}_1 = \{\tilde{\varepsilon}_1 = 0\}$, и за конечное время обеспечиваются соотношения $\bar{z}_1 = \bar{y}_1$ при $\bar{t}_1 > 0$, $\tilde{z}_1 = \tilde{y}_1$, $\dot{\tilde{\varepsilon}}_1 = 0 \Rightarrow \tilde{v}_{1\text{eq}} = \varepsilon_2$, при $\tilde{t}_1 > 0$, что обуславливает возникновение скользящих режимов в подблоках второго блока $\dot{\tilde{\varepsilon}}_2 = \varepsilon_3 - \tilde{M}_2 \text{sign} \tilde{\varepsilon}_2$, $\dot{\bar{\varepsilon}}_2 = \Delta \bar{h}_2 - \bar{M}_2 \text{sign} \bar{\varepsilon}_2$, где соотношения $\tilde{S}_2 = \{\tilde{\varepsilon}_2 = 0 \cap \tilde{S}_1\}$, $\tilde{z}_2 = \tilde{y}_2$, $\dot{\tilde{\varepsilon}}_2 = 0 \Rightarrow \tilde{v}_{2\text{eq}} = \varepsilon_3$, $\bar{S}_2 = \{\bar{\varepsilon}_2 = 0 \cap \bar{S}_1\}$, $\bar{z}_2 = \bar{y}_2$ выполняются за теоретически конечное время $\tilde{t}_2 > \tilde{t}_1$, $\bar{t}_2 > \bar{t}_1$ соответственно. По индукции, в i -м блоке выполняются соотношения

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}_i = \varepsilon_{i+1} - \tilde{M}_i \text{sign} \tilde{\varepsilon}_i, \quad \tilde{S}_i = \{\tilde{\varepsilon}_i = 0 \cap \tilde{S}_{i-1}\}, \quad \tilde{z}_i = \tilde{y}_i, \quad \dot{\tilde{\varepsilon}}_i = 0 \Rightarrow \tilde{v}_{i\text{eq}} = \varepsilon_{i+1} \quad (4.21)$$

при $\tilde{t}_i > \tilde{t}_{i-1}$ и $\dot{\bar{\varepsilon}}_i = \Delta \bar{h}_i - \bar{M}_i \text{sign} \bar{\varepsilon}_i$, $\bar{S}_i = \{\bar{\varepsilon}_i = 0 \cap \bar{S}_{i-1}\}$, $\bar{z}_i = \bar{y}_i$ при $\bar{t}_i > \bar{t}_{i-1}$, $i = \overline{2, \nu-1}$; $\dot{\varepsilon}_\nu = \Delta \bar{h}_\nu - M_\nu \text{sign} \varepsilon_\nu$, $S_\nu = \{\varepsilon_\nu = 0 \cap \tilde{S}_{\nu-1}\}$, $z_\nu = y_\nu$ при $t_\nu > \tilde{t}_{\nu-1}$, что приведет к полной стабилизации невязок $\varepsilon^* = 0$ и решению задачи оценивания $z^* = y^*$ за теоретически конечное

время $t^* = \max\{\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_{\nu-1}, t_\nu\}$. Заметим, что попадание на многообразии скольжения \bar{S}_i , $i = \overline{2, \nu-1}$ во втором подблоке каждого блока связано с предыдущими построениями, но не оказывает влияние на последующие. Для непосредственного получения эквивалентных значений разрывных корректирующих воздействий, как и раньше, используются линейные фильтры с малой постоянной времени (2.29), (2.31). Структурная схема наблюдателя на скользящих режимах для нелинейной системы аналогична структурной схеме наблюдателя для линейной системы (см. рис. 2.3).

Заметим, что размерность наблюдателя на скользящих режимах может быть понижена на величину $(m_1 - m_2)$ за счет второго подблока первого блока относительно \bar{z}_1 . Вместе с этим, при необходимости можно использовать несколько иную методику, а именно построить наблюдатель состояния в виде

$$\dot{\tilde{z}}_1 = z_2 + \tilde{v}_1, \quad \dot{\tilde{z}}_i = z_i + \tilde{v}_i; \quad \dot{\tilde{z}}_i = \bar{h}_i(\bar{y}_1, z^*, w_{\nu-1}^*), \quad i = \overline{2, \nu-1}; \quad \dot{z}_\nu = \bar{h}_\nu(\bar{y}_1, z^*, w_\nu^*), \quad (4.22)$$

где \tilde{v}_i соответствуют (4.19), в последних уравнениях корректирующие воздействия отсутствуют, а сигнал \bar{y}_1 подается непосредственно с выхода объекта управления вместо \bar{z}_1 . Дифференциальные уравнения относительно невязок $\tilde{\varepsilon}_i = \tilde{y}_i - \tilde{z}_i$, $i = \overline{1, \nu}$ с учетом (4.12), (4.22), а также фильтров (2.29), (2.31), принимают вид (4.21), т.е. за теоретически конечное время осуществляется стабилизация переменных $\tilde{\varepsilon}_i = 0$, и решается задача оценивания $\tilde{z}_i = \tilde{y}_i$. Задача стабилизации переменных $\bar{\varepsilon}_i$, $i = \overline{2, \nu-1}$; ε_ν не ставится, а для оценки векторов \bar{y}_i , $i = \overline{2, \nu-1}$; y_ν непосредственно используются величины эквивалентных управлений: $\bar{y}_{i+1} = \bar{z}_{i+1} + \bar{E}_{i+1} \tilde{v}_{ieq}$, $i = \overline{1, \nu-2}$, $y_\nu = z_\nu + \tilde{v}_{(\nu-1)eq}$.

Рассмотрим возможность получения дополнительной информации об объекте управления (4.1) с помощью наблюдателя на скользящих режимах. Если в ходе процедуры приведения модели объекта управления к БКФН в правых частях дифференциальных уравнений не выполнять замену переменных, то соотношения i -го шага примут вид $\dot{y}_i = \bar{h}_i(x, w_i^*)$, $\dot{\tilde{y}}_i = \tilde{h}_i(x, w_i^*) = y_{i+1}$, $\dot{\tilde{y}}_i = \bar{h}_i(x, w_i^*)$, $x = \text{col}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_\nu) \in R^n$ и

$$\dim y_{i+1} = \dim \bar{x}_{i+1} = \text{rank}\{\partial \bar{h}_i / \partial \bar{x}_{i+1}\} = \text{rank}\{\partial \tilde{h}_i / \partial \bar{x}_{i+1}\} = m_{i+1}. \quad (4.23)$$

При необходимости выполнения обратных преобразований (4.15) или в виде $\bar{x}_{i+1} = \tilde{h}_i^{-1}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i, y_{i+1}, \bar{x}_{i+2}, \dots, \bar{x}_\nu, w_i^*)$, $i = \overline{0, \nu-1}$ потребуются знание соответствующих операторов. В тоже время в выражениях $\bar{h}_i(x, w_i^*)$, $i = \overline{1, \nu-1}$; $\bar{h}_\nu(x, w_\nu^*)$ допустима параметрическая неопределенность при условии, что она не оказывает влияние на ранговые соотношения (4.23). Тогда указанные вектор-функции можно трактовать как внешние возмущения, которые предполагаются ограниченными в какой-либо норме

$$\|\bar{h}_i(x, w_i^*)\| < \bar{F}_i, \quad i = \overline{1, \nu} \quad (4.24)$$

и могут быть оценены с помощью наблюдателя на скользящих режимах. В рассматриваемом случае блоки наблюдателя (4.16), (4.19) (с учетом (4.18), (4.24)) и системы относительно невязок (4.17) примут вид (4.21), где $i = \overline{1, \nu-1}$ и

$$\dot{\tilde{z}}_i = \bar{v}_i, \quad \dot{\tilde{\varepsilon}}_i = \bar{h}_i(x, w_i^*) - \bar{v}_i, \quad i = \overline{1, \nu-1}; \quad \dot{z}_\nu = v_\nu, \quad \dot{\varepsilon}_\nu = \bar{h}_\nu(x, w_\nu^*) - v_\nu. \quad (4.25)$$

Дополнительная установка фильтров для определения \bar{v}_{ieq} , $i = \overline{1, \nu - 1}$; v_ν позволит получить следующие текущие оценки:

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_i \dot{\bar{\tau}}_i &= -\bar{\tau}_i + \bar{v}_i, \quad \bar{\tau}_i \in R^{m_i - m_{i+1}}, \quad \lim_{\bar{\mu}_i \rightarrow 0} \bar{\tau}_i(t) = \bar{v}_{ieq}(t) = \bar{h}_i(x, w_i^*), \quad i = \overline{1, \nu - 1}; \\ \mu_\nu \dot{\bar{\tau}}_\nu &= -\bar{\tau}_\nu + v_\nu, \quad \lim_{\mu_\nu \rightarrow 0} \bar{\tau}_\nu(t) = v_{\nu eq}(t) = \bar{h}_\nu(x, w_\nu^*). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Необходимость в дополнительной информации (4.26) может возникнуть в случае, когда задача управления и наблюдения решается в одних и тех же терминах, например, при формировании комбинированных управлений в автономных системах.

Структурная схема наблюдателя (4.21), (2.29) представлена на рис. 4.5

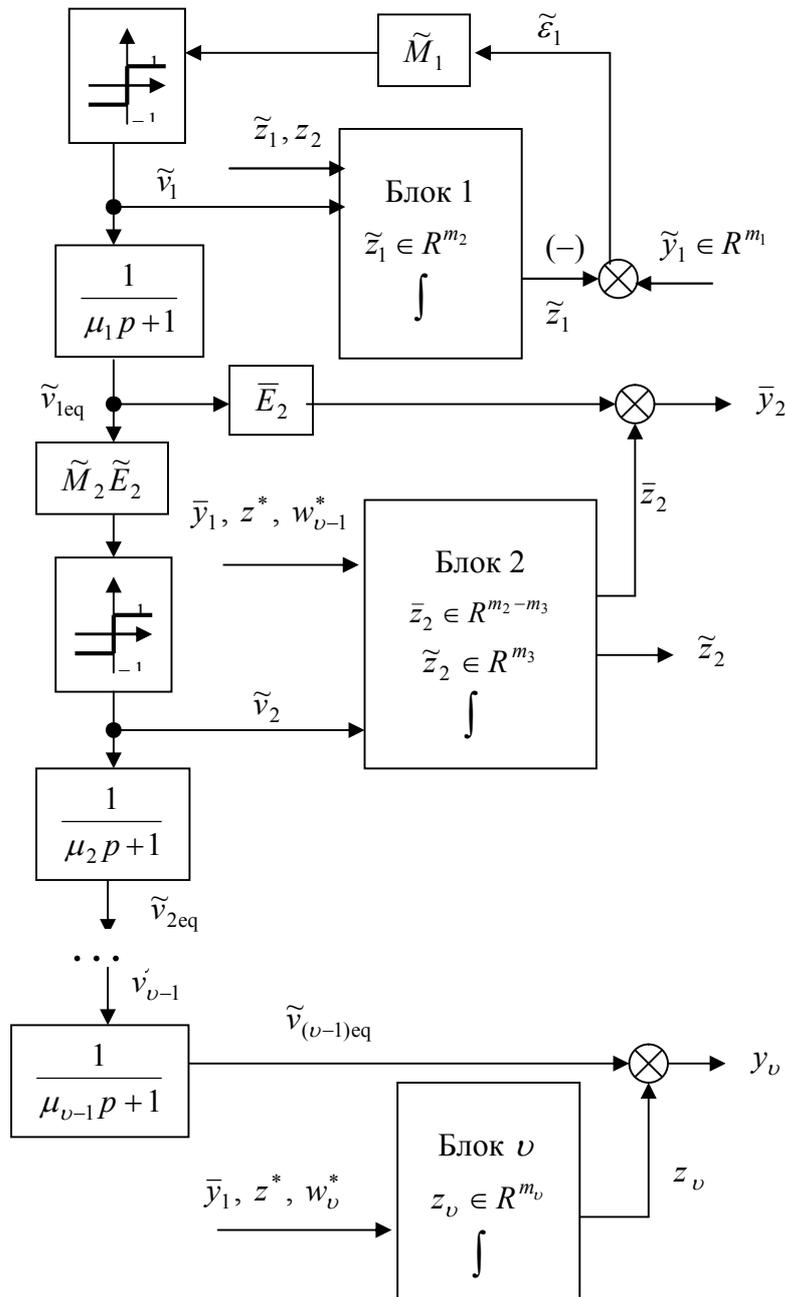


Рис. 4.5. Структурная схема наблюдателя на скользящих режимах пониженной размерности

Приведенные в данном разделе алгоритмы построения наблюдателей на скользящих режимах могут быть реализованы при условии, что шумы в каналах измерения отсутствуют. В противном случае потребуются алгоритмы с непрерывной коррекцией, которые предложены в следующем разделе.

4.4. Каскадный синтез наблюдателя состояния с непрерывными корректирующими воздействиями

Для сохранения декомпозиции задачи синтеза при непрерывной коррекции будем опираться на результаты раздела 2.4, что потребует предварительного преобразования линейной части БКФН к верхнему треугольному виду с наперед заданными матрицами на главной диагонали. Для дальнейшего изложения представим БКФН (4.12) в виде с неявным разделением на подблоки:

$$\dot{y}_i = E_{i1}y_{i+1} + E_{i2}\bar{h}_i(y^*, w_{v-1}^*), \quad i = \overline{1, v-1}; \quad \dot{y}_v = \bar{h}_v(y^*, w_v^*), \quad (4.27)$$

где $E_{i1} \in R^{m_i \times m_{i+1}}$, $E_{i1} = \begin{pmatrix} I_{m_{i+1}} \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_{i2} \in R^{m_i \times (m_i - m_{i+1})}$, $E_{i2} = \begin{pmatrix} 0 \\ I_{m_i - m_{i+1}} \end{pmatrix}$, $i = \overline{1, v-1}$, $I_{m_{i+1}}$, $I_{m_i - m_{i+1}}$ – единичные матрицы указанных размерностей.

Процедура преобразования системы (4.27) к верхнему треугольному виду.

Для системы (4.27) вводятся новые переменные состояния $q^* = \text{col}(q_1, \dots, q_v)$, $\dim q_i = \dim y_i = m_i$ и неособая замена переменных:

$$q_i = \sum_{j=1}^{i-2} W_{ij}^* y_j - L_i^* y_{i-1} + y_i, \quad i = \overline{1, v}, \quad (4.28)$$

где W_{1j}^* , L_1^* , $W_{2j}^* = 0$, $W_{ij}^* \in R^{m_i \times m_j}$, $W_{ij}^* = (W_{ij} \ 0)$, $W_{ij} \in R^{m_i \times m_{j+1}}$, $L_i^* \in R^{m_i \times m_{i-1}}$, $L_i^* = (L_i \ 0)$, $L_i \in R^{m_i \times m_i}$ – матрицы с постоянными коэффициентами, которые будут выбраны позже при синтезе наблюдателя состояния.

Запишем дифференциальные уравнения для новых переменных состояния q^* (4.28), подставляя в них выражения из системы (4.27):

$$\begin{aligned} \dot{q}_i = & \sum_{j=1}^{i-2} W_{ij}^* (E_{j1}y_{j+1} + E_{j2}\bar{h}_j(y^*, w_{v-1}^*)) - \\ & - L_i^* (E_{i-1,1}y_i + E_{i-1,2}\bar{h}_{i-1}(y^*, w_{v-1}^*)) + E_{i1}y_{i+1} + E_{i2}\bar{h}_i(y^*, w_{v-1}^*), \quad i = \overline{1, v}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Учитывая, что $W_{ij}^* E_{j1} = W_{ij}$, $W_{ij}^* E_{j2} = 0$, $j = \overline{1, i-2}$; $W_{20} = 0$, $E_{v1} = 0$, $E_{v2} = I_{m_v}$, $L_i^* E_{i-1,1} = L_i$, $L_i^* E_{i-1,2} = 0$, систему (4.29) можно переписать в виде:

$$\dot{q}_1 = E_{11}y_2 + E_{12}\bar{h}_1(y^*, w_{v-1}^*);$$

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \sum_{j=1}^{i-2} W_{ij} y_{j+1} - L_i y_i + E_{i1} y_{i+1} + E_{i2} \bar{h}_i(y^*, w_{v-1}^*), \quad i = \overline{2, v-1}; \\ \dot{q}_v &= \sum_{j=1}^{v-2} W_{vj} y_{j+1} - L_v y_v + \bar{h}_v(y^*, w_v^*).\end{aligned}\quad (4.30)$$

Из системы (4.28) находим соотношения

$$\begin{aligned}y_1 &= q_1; \quad y_i = q_i - \sum_{j=1}^{i-2} W_{ij}^* y_j + L_i^* y_{i-1}, \quad i = \overline{2, v}; \\ y_{i+1} &= q_{i+1} - \sum_{j=1}^{i-1} W_{i+1,j}^* y_j + L_{i+1}^* y_i, \quad i = \overline{2, v-1},\end{aligned}\quad (4.31)$$

которые подставляем в систему (4.30) следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= E_{11} L_2^* q_1 + E_{11} q_2 + E_{12} \bar{h}_1(q^*, w_{v-1}^*); \\ \dot{q}_i &= (L_i W_{i1}^* - E_{i1} W_{i+1,1}^* - E_{i1} L_{i+1}^* W_{i1}^*) q_1 + \sum_{j=2}^{i-2} (W_{i,j-1} + L_i W_{ij}^* - E_{i1} W_{i+1,j}^* - E_{i1} L_{i+1}^* W_{ij}^*) y_j + \\ &\quad + (W_{i,i-2} - L_i L_i^* - E_{i1} W_{i+1,i-1}^* + E_{i1} L_{i+1}^* L_i^*) y_{i-1} + \\ &\quad + (E_{i1} L_{i+1}^* - L_i) q_i + E_{i1} q_{i+1} + E_{i2} \bar{h}_i(q^*, w_{v-1}^*), \quad i = \overline{2, v-1}; \\ \dot{q}_v &= L_v W_{v1}^* q_1 + \sum_{j=2}^{v-2} (W_{v,j-1} + L_v W_{vj}^*) y_j + (W_{v,v-2} - L_v L_v^*) y_{v-1} - L_v q_v + \bar{h}_v(q^*, w_v^*).\end{aligned}\quad (4.32)$$

В уравнения относительно \dot{q}_i ($i = \overline{3, v}$) системы (4.32) положим равными нулю множители при y_j ($j = \overline{2, i-1}$):

$$\begin{aligned}W_{i,j-1} + L_i W_{ij}^* - E_{i1} W_{i+1,j}^* - E_{i1} L_{i+1}^* W_{ij}^* &= 0, \quad j = \overline{2, i-2}; \\ W_{i,i-2} - L_i L_i^* - E_{i1} W_{i+1,i-1}^* + E_{i1} L_{i+1}^* L_i^* &= 0, \quad i = \overline{3, v-1}; \\ W_{v,j-1} + L_v W_{vj}^* &= 0, \quad j = \overline{2, v-2}; \quad W_{v,v-2} - L_v L_v^* = 0,\end{aligned}\quad (4.33)$$

откуда получаем выражения для последовательного вычисления коэффициентов матриц W снизу вверх, которые зависят от коэффициентов матриц L следующим образом:

$$\begin{aligned}W_{v,v-2} &= L_v L_v^*; \quad W_{v,j-1} = -L_v W_{vj}^*, \quad j = \overline{v-2, 2}; \\ W_{i,i-2} &= L_i L_i^* + E_{i1} W_{i+1,i-1}^* - E_{i1} L_{i+1}^* L_i^*, \quad i = \overline{v-1, 3}; \\ W_{i,j-1} &= -L_i W_{ij}^* + E_{i1} W_{i+1,j}^* + E_{i1} L_{i+1}^* W_{ij}^*, \quad j = \overline{i-2, 2}.\end{aligned}\quad (4.34)$$

С учетом (4.33), систему (4.32) можно теперь записать в виде

$$\dot{q}_1 = E_{11} L_2^* q_1 + E_{11} q_2 + E_{12} \bar{h}_1(q^*, w_{v-1}^*);$$

$$\begin{aligned}
\dot{q}_i &= (L_i W_{i1}^* - E_{i1} W_{i+1,1}^* - E_{i1} L_{i+1}^* W_{i1}^*) q_1 + \\
&+ (E_{i1} L_{i+1}^* - L_i) q_i + E_{i1} q_{i+1} + E_{i2} \bar{h}_i(q^*, w_{v-1}^*), \quad i = \overline{2, v-1}; \\
\dot{q}_v &= L_v W_{v1}^* q_1 - L_v q_v + \bar{h}_v(q^*, w_v^*).
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Для системы (4.27), преобразованной к виду (4.35), строится наблюдатель с вектором состояния $z^* = \text{col}(z_1, \dots, z_v)$, $\dim q_i = \dim z_i$, $i = \overline{1, v}$, который имеет блочную структуру, аналогичную (4.35):

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= E_{11} L_2^* z_1 + E_{11} z_2 + E_{12} \bar{h}_1(z^*, w_{v-1}^*) + v_1; \\
\dot{z}_i &= (L_i W_{i1}^* - E_{i1} W_{i+1,1}^* - E_{i1} L_{i+1}^* W_{i1}^*) z_1 + \\
&+ (E_{i1} L_{i+1}^* - L_i) z_i + E_{i1} z_{i+1} + E_{i2} \bar{h}_i(z^*, w_{v-1}^*) + v_i, \quad i = \overline{2, v-1}; \\
\dot{z}_v &= L_v W_{v1}^* z_1 - L_v z_v + \bar{h}_v(z^*, w_v^*) + v_v,
\end{aligned} \tag{4.36}$$

где v_i ($i = \overline{1, v}$) – управляющие воздействия наблюдателя, которые выберем в виде

$$\begin{aligned}
v_1 &= L_1(q_1 - z_1); \quad v_i = (L_i W_{i1}^* - E_{i1} W_{i+1,1}^* - E_{i1} L_{i+1}^* W_{i1}^*)(q_1 - z_1), \quad i = \overline{2, v-1}; \\
v_v &= L_v W_{v1}^*(q_1 - z_1),
\end{aligned} \tag{4.37}$$

где $L_1 \in R^{m_1 \times m_1}$ – диагональная матрица с постоянными коэффициентами. Тогда, относительно невязок $\varepsilon_i = q_i - z_i$ (принимая во внимание выражения (4.35)–(4.37)) получим верхнюю треугольную относительно линейной части замкнутую систему вида

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_i &= (E_{i1} L_{i+1}^* - L_i) \varepsilon_i + E_{i1} \varepsilon_{i+1} + E_{i2} (\bar{h}_i(z^* + \varepsilon^*, w_{v-1}^*) - \bar{h}_i(z^*, w_{v-1}^*)), \quad i = \overline{1, v-1}; \\
\dot{\varepsilon}_v &= -L_v \varepsilon_v + \bar{h}_v(z^* + \varepsilon^*, w_v^*) - \bar{h}_v(z^*, w_v^*).
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Так же как и в линейных системах (см. раздел 2.4), в рассматриваемом нелинейном случае вид (4.38) является предпосылкой декомпозиции задачи синтеза (выбора коэффициентов обратной связи L_i , $i = \overline{1, v}$), которая разделяется на последовательно решаемые (снизу вверх) подзадачи, размерность которых равна размерности блоков. Отличие заключается в том, что в сделанных предположениях только об ограниченности нелинейных составляющих (4.18) устойчивость системы (4.38) с заданной точностью может быть обеспечена в общем случае при организации глубокой обратной связи $L_i = \text{diag}(l_{ik}) \rightarrow \infty$ (доказательство данного факта здесь не приводится, поскольку не имеет непосредственного практического значения). В то же время, если конкретизировать тип нелинейностей и предположить, что они удовлетворяют, например, условиям Липшица, можно обеспечить асимптотическую устойчивость системы (4.38) с желаемыми темпами сходимости и при конечных коэффициентах наблюдателя. Данные утверждения сформулируем в виде двух теорем, для доказательства которых будет использован второй метод Ляпунова для исследования достаточных условий устойчивости замкнутых систем, записанных относительно невязок. При синтезе квадратичных форм также применяется каскадный принцип [71, 81], что позволит получить соотношения для независимого выбора коэффициентов наблюдателя состояния в каждом блоке системы (4.38) в виде неравенств.

Теорема 4.3. Пусть область изменения переменных ε^ открыта и ограничена в какой-*

либо норме $\|\varepsilon^*\| < F^* = \text{const}$, и в системе (4.38) выполняются соотношения (4.18). Тогда существуют конечные значения коэффициентов матриц L_i , $i = \overline{1, \nu}$, которые позволяют решить задачу стабилизации системы (4.38) с заданной точностью

$$\|\varepsilon_i\| < \Delta_i, \quad i = \overline{1, \nu} \quad (4.39)$$

и, следовательно, получить оценки преобразованных переменных q^* с заданной точностью.

Доказательство теоремы 4.3. В соответствии с исходным представлением координат системы (4.38) в виде $\varepsilon_i = \text{col}(\tilde{\varepsilon}_i, \bar{\varepsilon}_i)$, $\tilde{\varepsilon}_i \in R^{m_{i+1}}$, $\bar{\varepsilon}_i \in R^{m_i - m_{i+1}}$, положим

$$L_i = \begin{pmatrix} \tilde{L}_i & 0 \\ 0 & \bar{L}_i \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, \nu-1}, \quad (4.40)$$

где (без ограничения общности) матрицы $\tilde{L}_i \in R^{m_{i+1} \times m_{i+1}}$, $\bar{L}_i \in R^{(m_i - m_{i+1}) \times (m_i - m_{i+1})}$ имеют диагональный вид. Произведем дополнительное разбиение вектора состояния

$$\tilde{\varepsilon}_i = \text{col}(\tilde{\varepsilon}_{i\nu}, \tilde{\varepsilon}_{i,\nu-1}, \dots, \tilde{\varepsilon}_{i,i+1}), \quad \tilde{\varepsilon}_{i\nu} \in R^{m_\nu}, \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} \in R^{m_j - m_{j+1}}, \quad j = \overline{\nu-1, i+1}. \quad (4.41)$$

Группировка компонент векторов $\tilde{\varepsilon}_i$ (4.41) раскрывает связи между переменными подблоков различных блоков, которые следуют из структуры наблюдаемости исходной системы (4.1), показанной ранее покомпонентно в терминах исходной системы на рис. 4.2. Проиллюстрируем разбиение (4.41) с помощью условной диаграммы, представленной на рис. 4.6 на примере системы, расщепленной на 5 блоков ($\nu = 5$). Высота прямоугольников соответствует размерности соответствующих векторов.

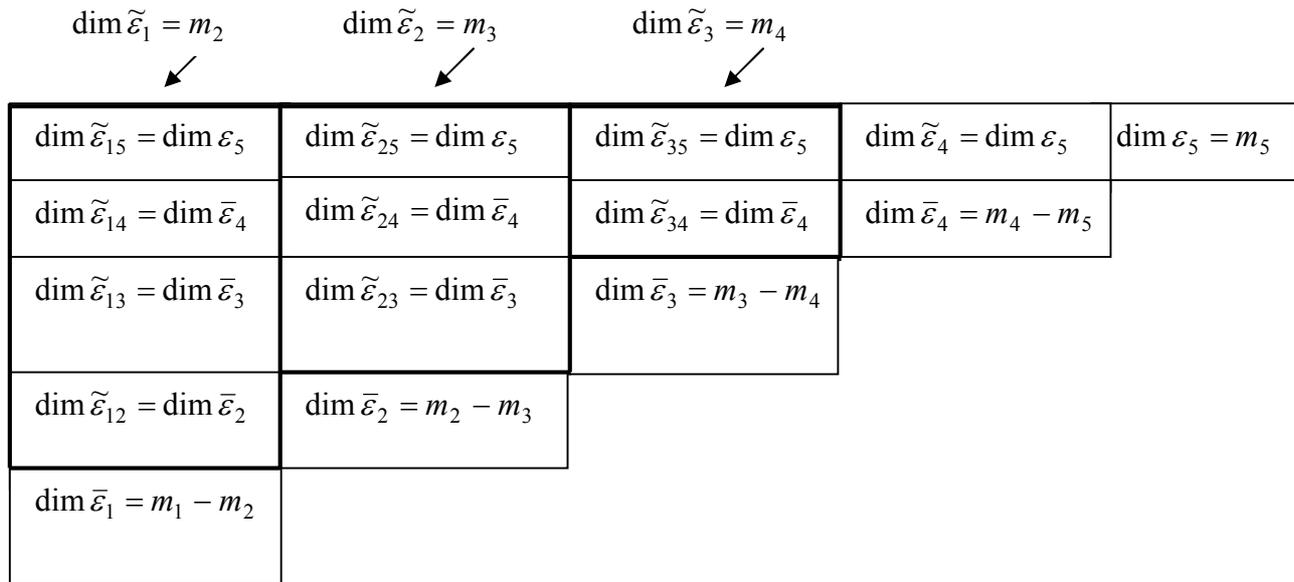


Рис. 4.6. Структура разбиения (4.41)

Для простоты изложения положим диагональные элементы матриц \bar{L}_i ($i = \overline{1, \nu-1}$) и L_ν равными между собой: $\bar{l}_i = \text{const} > 0$; $\bar{l}_\nu = \text{const} > 0$, соответственно. Для диагональных эле-

ментов матриц $\tilde{L}_i = \text{diag}(\tilde{l}_{ik})$ предположим, что $\tilde{l}_{ik} = \text{const} > 0$, $k = \overline{1, m_{i+1}}$, $i = \overline{1, \nu-1}$ и

$$\begin{aligned}\tilde{l}_{i1} &= \tilde{l}_{i2} = \dots = \tilde{l}_{im_\nu} = \tilde{l}_i^\nu; \quad \tilde{l}_{i,(m_\nu+1)} = \dots = \tilde{l}_{i,(m_{\nu-1}-m_\nu)} = \tilde{l}_i^{\nu-1}; \\ \tilde{l}_{i,(m_{j+1}-m_{j+2}+1)} &= \dots = \tilde{l}_{i,(m_j-m_{j+1})} = \tilde{l}_i^j, \quad j = \overline{\nu-2, i+1}.\end{aligned}\quad (4.42)$$

Тогда с учетом обозначений (4.40)–(4.42) систему (4.38) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} &= (\tilde{l}_{i+1}^j - \tilde{l}_i^j) \tilde{\varepsilon}_{ij} + \tilde{\varepsilon}_{i+1,j}, \quad j = \overline{\nu, i+2}, \\ \dot{\tilde{\varepsilon}}_{i,i+1} &= (\bar{l}_{i+1} - \tilde{l}_i^{i+1}) \tilde{\varepsilon}_{i,i+1} + \bar{\varepsilon}_{i+1}, \quad i = \overline{1, \nu-2}; \quad \dot{\tilde{\varepsilon}}_{\nu-1,\nu} = (\bar{l}_\nu - \tilde{l}_{\nu-1}^\nu) \tilde{\varepsilon}_{\nu-1,\nu} + \varepsilon_\nu; \\ \dot{\tilde{\varepsilon}}_i &= -\bar{l}_i \bar{\varepsilon}_i + \Delta \bar{h}_i, \quad i = \overline{1, \nu-1}; \quad \dot{\varepsilon}_\nu = -\bar{l}_\nu \varepsilon_\nu + \Delta \bar{h}_\nu.\end{aligned}\quad (4.43)$$

В соответствии с разбиением (4.40), (4.41) можно детализировать условие (4.39) следующим образом:

$$\|\tilde{\varepsilon}_{ij}\| < \bar{\Delta}_{ij}, \quad j = \overline{\nu, i+1}; \quad \|\bar{\varepsilon}_i\| < \bar{\Delta}_i, \quad i = \overline{1, \nu-1}.\quad (4.44)$$

Рассмотрим для системы (4.43) квадратичную форму V^* в виде суммы квадратичных форм

$$V^* = \sum_{i=1}^{\nu-1} \left(\sum_{j=\nu}^{i+1} \tilde{V}_{ij} + \bar{V}_i \right) + V_\nu = \sum_{i=1}^{\nu-1} \left(\sum_{j=\nu}^{i+1} \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_{ij}^T \tilde{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}_i^T \bar{\varepsilon}_i \right) + \frac{1}{2} \varepsilon_\nu^T \varepsilon_\nu.\quad (4.45)$$

Покажем, что общую оценку производной \dot{V}^* квадратичной формы (4.45) можно получить, оценивая последовательно производные каждого слагаемого выражения (4.45). Запишем производные слагаемых выражения (4.45) на траекториях системы (4.43), для которых с учетом (4.18) справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{V}}_{ij} &= \tilde{\varepsilon}_{ij}^T ((\tilde{l}_{i+1}^j - \tilde{l}_i^j) \tilde{\varepsilon}_{ij} + \tilde{\varepsilon}_{i+1,j}) \leq (\tilde{l}_{i+1}^j - \tilde{l}_i^j) \|\tilde{\varepsilon}_{ij}\| \|\tilde{\varepsilon}_{ij}\| + \|\tilde{\varepsilon}_{ij}\| \|\tilde{\varepsilon}_{i+1,j}\|, \quad j = \overline{\nu, i+2}, \\ \dot{\tilde{V}}_{i,i+1} &= \tilde{\varepsilon}_{i,i+1}^T ((\bar{l}_{i+1} - \tilde{l}_i^{i+1}) \tilde{\varepsilon}_{i,i+1} + \bar{\varepsilon}_{i+1}) \leq (\bar{l}_{i+1} - \tilde{l}_i^{i+1}) \|\tilde{\varepsilon}_{i,i+1}\| \|\tilde{\varepsilon}_{i,i+1}\| + \|\tilde{\varepsilon}_{i,i+1}\| \|\bar{\varepsilon}_{i+1}\|, \quad i = \overline{1, \nu-2}; \\ \dot{\tilde{V}}_{\nu-1,\nu} &= \tilde{\varepsilon}_{\nu-1,\nu}^T ((\bar{l}_\nu - \tilde{l}_{\nu-1}^\nu) \tilde{\varepsilon}_{\nu-1,\nu} + \varepsilon_\nu) \leq (\bar{l}_\nu - \tilde{l}_{\nu-1}^\nu) \|\tilde{\varepsilon}_{\nu-1,\nu}\| \|\tilde{\varepsilon}_{\nu-1,\nu}\| + \|\tilde{\varepsilon}_{\nu-1,\nu}\| \|\varepsilon_\nu\|; \\ \dot{\bar{V}}_i &= \bar{\varepsilon}_i^T (-\bar{l}_i \bar{\varepsilon}_i + \Delta \bar{h}_i) \leq -\bar{l}_i \|\bar{\varepsilon}_i\| \|\bar{\varepsilon}_i\| + \|\bar{\varepsilon}_i\| \|\bar{F}_i\|, \quad i = \overline{1, \nu-1}; \\ \dot{V}_\nu &= \varepsilon_\nu^T (-\bar{l}_\nu \varepsilon_\nu + \Delta \bar{h}_\nu) \leq -\bar{l}_\nu \|\varepsilon_\nu\| \|\varepsilon_\nu\| + \|\varepsilon_\nu\| \|\bar{F}_\nu\|.\end{aligned}\quad (4.46)$$

Рассмотрим два последних уравнения системы (4.46). Производные $\dot{\bar{V}}_i < 0$, $i = \overline{1, \nu-1}$, $\dot{V}_\nu < 0$ при выполнении условий $\bar{l}_i > \bar{F}_i / \|\bar{\varepsilon}_i\|$, $\bar{l}_\nu > \bar{F}_\nu / \|\varepsilon_\nu\|$, и векторы состояния сходятся в области

$$\|\bar{\varepsilon}_i\| \leq \frac{\bar{F}_i}{\bar{l}_i} < \bar{\Delta}_i, \quad \|\varepsilon_\nu\| \leq \frac{\bar{F}_\nu}{\bar{l}_\nu} < \Delta_\nu.\quad (4.47)$$

Решению задачи оценивания с заданной точностью (4.39) соответствующих компонент (4.44) удовлетворяют следующие неравенства для независимого выбора коэффициентов наблюдателя:

$$\frac{\bar{F}_i}{\bar{\Delta}_i} < \bar{l}_i, \quad \frac{\bar{F}_v}{\bar{\Delta}_v} < \bar{l}_v. \quad (4.48)$$

Рассмотрим второе и третье уравнения системы (4.46). Производные $\dot{\tilde{V}}_{i,i+1} < 0$, $i = \overline{1, \nu - 2}$; $\dot{\tilde{V}}_{v-1,v} < 0$ при выполнении условий $\tilde{l}_i^{i+1} - \bar{l}_{i+1} > \|\tilde{\varepsilon}_{i+1}\| / \|\tilde{\varepsilon}_{i,i+1}\|$, $\tilde{l}_{v-1}^v - \bar{l}_v > \|\varepsilon_v\| / \|\tilde{\varepsilon}_{v-1,v}\|$, и векторы состояния сходятся в области $\|\tilde{\varepsilon}_{i,i+1}\| \leq \|\tilde{\varepsilon}_{i+1}\| / (\tilde{l}_i^{i+1} - \bar{l}_{i+1})$, $\|\tilde{\varepsilon}_{v-1,v}\| \leq \|\varepsilon_v\| / (\tilde{l}_{v-1}^v - \bar{l}_v)$, или с учетом (4.47)

$$\|\tilde{\varepsilon}_{i,i+1}\| \leq \frac{\bar{F}_i}{\bar{l}_i(\tilde{l}_i^{i+1} - \bar{l}_{i+1})} < \tilde{\Delta}_{i,i+1}, \quad \|\tilde{\varepsilon}_{v-1,v}\| \leq \frac{\bar{F}_v}{\bar{l}_v(\tilde{l}_{v-1}^v - \bar{l}_v)} < \tilde{\Delta}_{v-1,v}. \quad (4.49)$$

Решению задачи оценивания соответствующих компонент с заданной точностью (4.39), (4.44) удовлетворяют следующие неравенства для независимого выбора коэффициентов наблюдателя:

$$\tilde{l}_i^{i+1} > \frac{\bar{F}_i}{\bar{l}_i \tilde{\Delta}_{i,i+1}} + \bar{l}_{i+1}, \quad \tilde{l}_i^{i+1} > \bar{l}_{i+1}, \quad i = \overline{1, \nu - 1}. \quad (4.50)$$

И, наконец, рассмотрим первое уравнение системы (4.46). Производные $\dot{\tilde{V}}_{ij} < 0$, $j = \overline{\nu, i + 2}$, $i = \overline{1, \nu - 2}$ при выполнении условий $\tilde{l}_i^j - \bar{l}_{i+1}^j > \|\tilde{\varepsilon}_{i+1,j}\| / \|\tilde{\varepsilon}_{ij}\|$, и векторы состояния сходятся в области $\|\tilde{\varepsilon}_{ij}\| \leq \|\tilde{\varepsilon}_{i+1,j}\| / (\tilde{l}_i^j - \bar{l}_{i+1}^j)$, или с учетом (4.49)

$$\|\tilde{\varepsilon}_{ij}\| \leq \frac{\bar{F}_j}{\bar{l}_j(\tilde{l}_{j-1}^j - \bar{l}_j)(\tilde{l}_{j-2}^j - \bar{l}_{j-1}^j) \dots (\tilde{l}_{i+1}^j - \bar{l}_{i+2}^j)(\tilde{l}_i^j - \bar{l}_{i+1}^j)} < \tilde{\Delta}_{ij}. \quad (4.51)$$

Решению задачи оценивания соответствующих компонент с заданной точностью (4.39), (4.44) удовлетворяют следующие неравенства для независимого назначения коэффициентов корректирующих воздействий наблюдателя:

$$\tilde{l}_i^j > \frac{\bar{F}_j}{\bar{l}_j(\tilde{l}_{j-1}^j - \bar{l}_j)(\tilde{l}_{j-2}^j - \bar{l}_{j-1}^j) \dots (\tilde{l}_{i+1}^j - \bar{l}_{i+2}^j)\tilde{\Delta}_{ij}} + \tilde{l}_{i+1}^j, \quad (4.52)$$

$$\tilde{l}_i^j > \tilde{l}_{i+1}^j > \tilde{l}_{i+2}^j > \dots > \tilde{l}_{j-1}^j > \bar{l}_j, \quad j = \overline{\nu, i + 2}, \quad i = \overline{1, \nu - 2}.$$

При выборе диагональных элементов матриц L_i , ($i = \overline{1, \nu}$) в виде (4.48), (4.50), (4.52) выполняется условие $\dot{V}^* = \sum_{i=1}^{\nu-1} (\sum_{j=v}^{i+1} \dot{\tilde{V}}_{ij} + \dot{V}_i) + \dot{V}_v < 0$, следовательно, квадратичная форма (4.45) является функцией Ляпунова для системы (4.43). Система (4.43) устойчива в рассматриваемой области и задача оценки вектора q^* решается с заданной точностью (4.39), (4.44), ч.т.д.

Замечание 4.3. Вообще говоря, нет необходимости в восстановлении всех компонент вектора состояния системы, поскольку компоненты вектора $y_1 = q_1 \in R^{m_1}$ измеряются непосредственно. Достаточно построить наблюдатель состояния пониженного порядка для вос-

становления компонент q_2, \dots, q_ν суммарной размерности $(n - m_1)$. В этом случае в системе (4.35) первое уравнение отбрасывается, а наблюдатель пониженной размерности имеет вид $\dot{z}_i = (L_i W_{i1}^* - E_{i1} W_{i+1,1}^* - E_{i1} L_{i+1}^* W_{i1}^*) q_1 + (E_{i1} L_{i+1}^* - L_i) z_i + E_{i1} z_{i+1} + E_{i2} \bar{h}_i(q_1, z_2, \dots, z_\nu, w_{\nu-1}^*)$, $i = \overline{2, \nu-1}$; $\dot{z}_\nu = L_\nu W_{\nu 1}^* q_1 - L_\nu z_\nu + \bar{h}_\nu(q_1, z_2, \dots, z_\nu, w_\nu^*)$. Соответствующая система относительно невязок в данном случае совпадает с видом (4.38) без уравнений относительно ε_1 . Для нахождения конечных коэффициентов матриц L_i , $i = \overline{2, \nu}$ следует проделать описанную выше процедуру исследования квадратичной формы

$$V^* = \sum_{i=2}^{\nu-1} (\sum_{j=v}^{i+1} \tilde{V}_{ij} + \bar{V}_i) + V_\nu = \sum_{i=2}^{\nu-1} (\sum_{j=v}^{i+1} \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_{ij}^T \tilde{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}_i^T \bar{\varepsilon}_i) + \frac{1}{2} \varepsilon_\nu^T \varepsilon_\nu,$$

что в итоге приведет к результатам, аналогичным (4.48), (4.50), (4.52).

С практической точки зрения целесообразно построение наблюдателя состояния полной размерности (4.36), поскольку возможное наличие шумов в каналах измерения потребует фильтрации выходного сигнала, и наблюдатель полной размерности в этом случае можно рассматривать как фильтр Калмана, наложив дополнительные требования на коэффициенты наблюдателя для решения оптимальной задачи фильтрации.

Замечание 4.4. Если решать задачу получения оценок с заданной точностью для каждой компоненты вектора состояния в виде $|\hat{\varepsilon}_j| < \hat{\Delta}_j$, $j = \overline{1, n}$, $\varepsilon^* = \text{col}(\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \dots, \hat{\varepsilon}_n)$, $\hat{\varepsilon}_j \in R$ при условии $|\Delta \bar{h}_j(\varepsilon^*, w_{\nu-1}^*)| = |\bar{h}_j((z^* + \varepsilon^*), w_{\nu-1}^*) - \bar{h}_j(z^*, w_{\nu-1}^*)| < \hat{F}_j = \text{const}$, то в этом случае выбор коэффициентов в виде (4.48), (34.50), (4.52) является избыточным. Исследование квадратичной формы $V^* = \sum_{j=1}^n \hat{V}_j = \frac{1}{2} \hat{\varepsilon}_j^T \hat{\varepsilon}_j$, аналогичное приведенному выше, позволит решить задачу покомпонентной стабилизации невязок с заданной точностью при меньших, чем в выражениях (4.48), (4.50), (4.52), значениях коэффициентов \tilde{l}_j , $j = \overline{1, n}$. При этом задача оценивания также решается с заданной покомпонентно точностью $|\hat{q}_j - \hat{z}_j| = |\hat{z}_j - \hat{q}_j| < \hat{\Delta}_j$, $j = \overline{1, n}$, где $q^* = \text{col}(\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_n)$, $z^* = \text{col}(\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_n)$, т.е. текущее значение известной координаты \hat{z}_j будет принадлежать $\hat{\Delta}_j$ -окрестности искомого значения \hat{q}_j .

В отличие от наблюдателя на скользящих режимах, с помощью которого задача наблюдения решается за теоретически конечное время и погрешностью оценивания можно пренебречь при синтезе обратной связи, в рассматриваемом случае необходимо учесть требования разработчика, предъявляемые к точности $\Delta_x = \text{col}(\Delta_{x_1}, \dots, \Delta_{x_n})$ восстановления координат x исходной системы (4.1). При задании точности оценивания $\Delta^* = \text{col}(\hat{\Delta}_1, \dots, \hat{\Delta}_n)$ преобразованных переменных q^* следует учесть сделанные замены переменных. По построению переменные системы (4.35) связаны взаимно-однозначным соответствием (4.28) с переменными БКФН (4.27) или (4.12). Перепишем систему (4.28) в виде $\Lambda y^* = q^*$, где $\det \Lambda \neq 0$, т.е. система совместна и определена, имеет единственное решение. При решении обратной задачи и подстановке вместо q^* значений координат наблюдателя (4.36)–(4.37) получим $y^* = \Lambda^{-1} z^* \Rightarrow y^* = \Lambda^{-1} (q^* \pm \Delta^*)$, т.е. задача оценивания переменных БКФН решается с точностью $\Delta_y = |\Lambda^{-1} \Delta^*|$, $\Delta_y = \text{col}(\Delta_{y_1}, \dots, \Delta_{y_n})$, которая, в свою очередь, определяет точность восстановления текущих значений координат x исходной системы (4.1) с помощью выраже-

ний (4.15): $\Delta_x = \left| \tilde{h}^{-1}((y^* \pm A^{-1} \Delta^*), w_{\nu-1}^*) - \tilde{h}^{-1}(y^*, w_{\nu-1}^*) \right|$. Последнее соотношение может оказаться существенным при решении задачи собственно управления, поэтому при выборе точности оценивания $\hat{\Delta}_j$, $j = \overline{1, n}$ требуется рассмотреть обратную задачу с учетом допустимых значений Δ_x .

Следует отметить, что рассмотренный в доказательстве теоремы 4.3 каскадный алгоритм синтеза наблюдателя состояния с конечными коэффициентами без ограничения общности может быть применен и к линейным системам с внешними возмущениями (3.1)–(3.2), приведенным к БФНВ (3.15).

Рассмотрим еще один каскадный алгоритм синтеза наблюдателя состояния с непрерывной коррекцией, который при определенных условиях позволит получить асимптотически сходящиеся оценки не измеряемых координат.

Теорема 4.4. Пусть область изменения переменных ε^* открыта и ограничена, и в системе (4.38) для нелинейных составляющих выполняются условия Липшица:

$$\begin{aligned} \|\Delta \bar{h}_i(\varepsilon^*, w_{\nu-1}^*)\| &= \|\bar{h}_i(z^* + \varepsilon^*, w_{\nu-1}^*) - \bar{h}_i(z^*, w_{\nu-1}^*)\| < N_i \sum_{j=1}^{\nu} \|\varepsilon_j\|, \quad i = \overline{1, \nu-1}; \\ \|\Delta \bar{h}_\nu(\varepsilon^*, w_\nu^*)\| &= \|\bar{h}_\nu(z^* + \varepsilon^*, w_\nu^*) - \bar{h}_\nu(z^*, w_\nu^*)\| < N_\nu \sum_{j=1}^{\nu} \|\varepsilon_j\|, \end{aligned} \quad (4.53)$$

где $N_i = \text{const} > 0$, $i = \overline{1, \nu}$. Тогда существуют конечные значения коэффициентов матриц L_i , $i = \overline{1, \nu}$, которые позволяют обеспечить асимптотическую устойчивость системы (4.38).

Доказательство теоремы 4.4. Для системы (4.38) введем квадратичную форму в виде суммы квадратичных форм:

$$V^* = \sum_{i=1}^{\nu} V_i = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{2} \varepsilon_i^T \varepsilon_i. \quad (4.54)$$

Запишем выражение для производной квадратичной формы (4.54):

$$\dot{V}^* = \sum_{i=1}^{\nu-1} \varepsilon_i^T ((E_{i1} L_{i+1}^* - L_i) \varepsilon_i + E_{i1} \varepsilon_{i+1} + E_{i2} \Delta \bar{h}_i + \varepsilon_\nu^T (-L_\nu \varepsilon_\nu + \Delta \bar{h}_\nu)). \quad (4.55)$$

Предположим, что диагональные коэффициенты матриц L_i , $i = \overline{1, \nu}$ равны между собой и равны соответственно $l_i = \text{const} > 0$. Тогда с учетом условий (4.53) для системы (4.55) справедлива следующая оценка:

$$\dot{V}^* \leq \sum_{i=1}^{\nu-1} ((l_{i+1} - l_i) \|\varepsilon_i\|^2 + \|\varepsilon_i\| \|\varepsilon_{i+1}\| + N_i \|\varepsilon_i\| \sum_{j=1}^{\nu} \|\varepsilon_j\|) - l_\nu \|\varepsilon_\nu\|^2 + N_\nu \|\varepsilon_\nu\| \sum_{k=1}^{\nu} \|\varepsilon_k\|. \quad (4.56)$$

Выражение (4.56) является квадратичной формой и может быть представлено в виде суммы квадратов:

$$\dot{V}^* \leq - \left(\sum_{i=1}^{\nu} (a_i \|\varepsilon_i\|^2 + \sum_{j=1, j \neq i}^{\nu} (\frac{N_i}{2} \|\varepsilon_i\| - \|\varepsilon_j\|)^2) + \sum_{i=1}^{\nu-1} (\frac{1}{2} \|\varepsilon_i\| - \|\varepsilon_{i+1}\|)^2 \right), \quad (4.57)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= l_1 - l_2 - \frac{1}{4} - N_1 - (\nu - 1) \left(1 + \frac{N_1^2}{4}\right); \\ a_i &= l_i - l_{i+1} - \frac{1}{4} - N_i - \nu - (\nu - 1) \frac{N_i^2}{4}, \quad i = \overline{2, \nu-1}; \\ a_\nu &= l_\nu - N_\nu - \nu - (\nu - 1) \frac{N_\nu^2}{4}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Производная (4.57) \dot{V}^* отрицательна при $a_i > 0, i = \overline{1, \nu}$. Следовательно, значения коэффициентов $l_i, i = \overline{1, \nu}$, обеспечивающих асимптотическую устойчивость системы (4.38), могут быть независимо получены из выражений (4.58) и имеют вид неравенств, в которых соблюдается иерархический принцип:

$$\begin{aligned} a_1 > 0 &\Rightarrow l_1 > l_2 + \frac{1}{4} + N_1 + (\nu - 1) \left(1 + \frac{N_1^2}{4}\right); \\ a_i > 0 &\Rightarrow l_i > l_{i+1} + \frac{1}{4} + N_i + \nu + (\nu - 1) \frac{N_i^2}{4}, \quad i = \overline{2, \nu-1}; \\ a_\nu > 0 &\Rightarrow l_\nu > N_\nu + \nu + (\nu - 1) \frac{N_\nu^2}{4}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

При выполнении условий (4.59), (4.53) квадратичная форма (4.54) является функцией Ляпунова для системы (4.38), которая будет асимптотически устойчивой в рассматриваемой области, что решает поставленную задачу асимптотического оценивания вектора q^* при использовании конечных коэффициентов в устройстве наблюдения, ч.т.д.

Замечание 4.5. В теореме 4.4 получены достаточные условия и доказана принципиальная возможность решения поставленной задачи. Для уменьшения нижней оценки коэффициентов (4.59) следует аналогичным образом исследовать квадратичную форму в покомпонентном представлении $V^* = \sum_{j=1}^n \hat{V}_j = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \hat{\varepsilon}_j^T \hat{\varepsilon}_j, \hat{\varepsilon}_j \in R$, что позволит получить иерархию коэффициентов $\tilde{l}_j, j = \overline{1, n}$, соответствующих каждой переменной $\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \dots, \hat{\varepsilon}_n$.

Существенно, что разработанные алгоритмы синтеза непрерывной коррекции инвариантны к возможной параметрической неопределенности нелинейных составляющих, если она может быть учтена в верхних оценках (4.18), (4.53). Тот факт, что коэффициенты наблюдателя состояния подчиняются определенной иерархии и последовательно выбираются на основании полученных неравенств, существенно облегчает настройку системы наблюдения в условиях неопределенности.

В заключение данного раздела отметим, что каскадный синтез задачи наблюдения для линейных и нелинейных систем на основе блочно-наблюдаемых форм по сути аналогичен, поскольку часть нелинейной модели объекта управления, выделенная в соответствии со структурой наблюдаемости исходной системы, представлена в блочно-каноническом виде. В то же время желательно в большей степени отражать нелинейные свойства исходной системы (4.1) в блочном представлении. Данная проблема рассматривается в следующем разделе.

4.5. Блочно-наблюдаемая форма с максимальным сохранением нелинейностей

Полученная в разделе 4.2 форма наблюдаемости нелинейной системы (4.1) имеет канонический квазилинейный блочный вид (4.12). Предложенная в разделе 2.2 блочная форма наблюдаемости линейных систем (2.16) имеет нижний треугольный вид, дополненный наддиагональными элементами, т.е. в каждом i -м блоке в дифференциальное уравнение относительно y_i в правую часть входят переменные y_j , $j = \overline{1, i+1}$. В силу того, что решение задачи синтеза наблюдателя на скользящих режимах осуществляется «сверху вниз», при рассмотрении i -го блока невязки ε_{j-1} , $j = \overline{1, i}$ предыдущих блоков полагаются равными нулю, и соответствующие оценки переменных $y_{j-1} = \varepsilon_{j-1} + z_{j-1}$, $j = \overline{1, i}$ уже получены, а задача стабилизации переменных ε_i и восстановление ε_{i+1} решается непосредственно в i -м блоке. Таким образом, синтез задачи наблюдения для нижней треугольной блочной формы сводится, по сути, к синтезу канонической блочной формы. В то же время преобразование к нижней треугольной блочно-наблюдаемой форме предполагает меньший объем вычислений.

Распространяя данные рассуждения на нелинейные системы, получим следующую «нижнюю треугольную» (в смысле порядка вхождения в первые подблоки переменных других блоков) блочную форму наблюдаемости, в которой в правых частях уравнений относительно \tilde{y}_i , $i = \overline{1, v-1}$ сохранены нелинейные функции относительно y_j , $j = \overline{1, i}$:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{y}}_i &= \varphi_{i1}(y_i^*, w_i^*) + \varphi_{i2}(y_i^*, w_i^*)y_{i+1}, \quad \dot{\bar{y}}_i = \bar{h}_i(y^*, w_{v-1}^*), \quad i = \overline{1, v-1}; \\ \dot{y}_v &= \bar{h}_v(y^*, w_v^*), \end{aligned} \quad (4.60)$$

где $y_i^* = \text{col}(y_1, \dots, y_i)$, вектор-функции φ_{i1} , φ_{i2} ($i = \overline{1, v-1}$) могут быть выделены в процессе преобразований в соответствии со структурой системы (4.1). В частных случаях некоторые из данных функций отсутствуют или являются линейными. В системе (4.60), которую назовем блочной формой наблюдаемости нелинейной системы с максимальным сохранением нелинейностей (БФНН), по сравнению с БКФН (4.12) линейная часть отсутствует. Структурная схема БФНН (4.60), которая в большей степени отражает нелинейные свойства модели объекта управления, изображена на рис. 4.7.

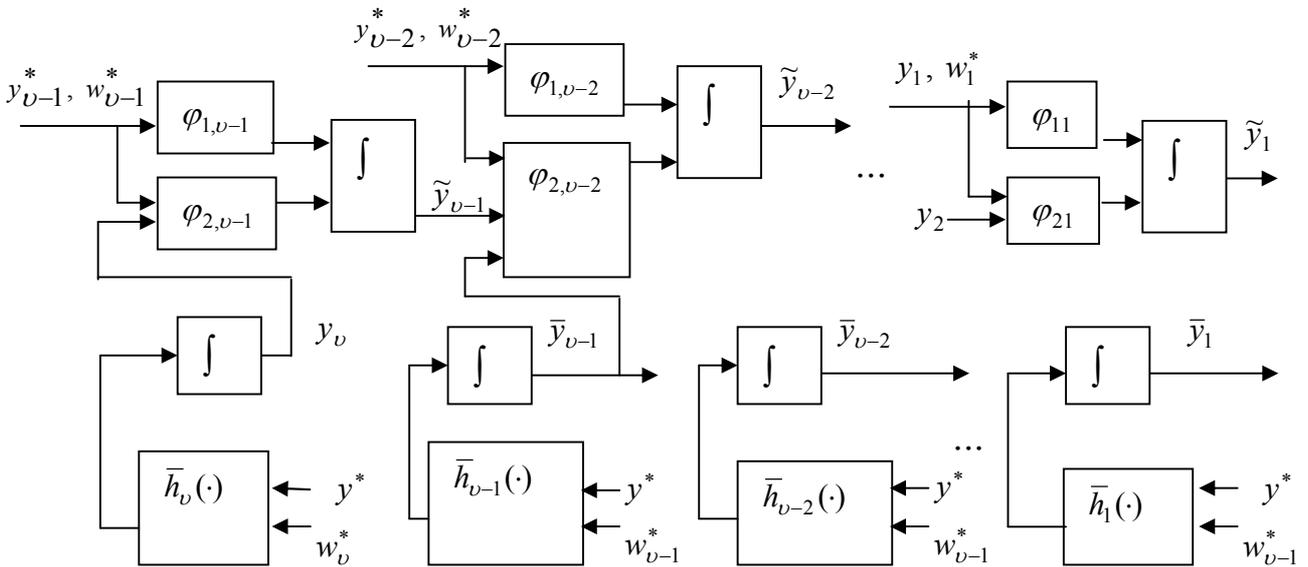


Рис. 4.7. Структурная схема БФНН (4.60)

Для системы (4.60) наблюдатель состояния на скользящих режимах полной размерности имеет следующий вид:

$$\dot{\tilde{z}}_i = \varphi_{i2}(z_i^*, w_i^*)z_{i+1} + \tilde{v}_i, \quad \dot{\bar{z}}_i = \bar{h}_i(z^*, w_{v-1}^*) + \bar{v}_i, \quad i = \overline{1, v-1}; \quad \dot{z}_v = \bar{h}_v(z^*, w_v^*) + v_v, \quad (4.61)$$

где $z_i^* = \text{col}(z_1, \dots, z_i)$, $\tilde{z}_i = \text{col}(\tilde{z}_i, \bar{z}_i)$, $\dim z_i = \dim y_i = \dim v_i$, $i = \overline{1, v}$, $v_i = \text{col}(\tilde{v}_i, \bar{v}_i)$, v_v – разрывные корректирующие воздействия наблюдателя с компенсирующей составляющей, которые независимо формируются в каждом подблоке для последовательного решения задачи стабилизации системы уравнений, записанных относительно невязок $\varepsilon_i = y_i - z_i$, $\varepsilon_i = \text{col}(\tilde{\varepsilon}_i, \bar{\varepsilon}_i) \in R^{m_i}$, $\varepsilon_i^* = \text{col}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i)$, которые с учетом (4.60)–(4.61) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\varepsilon}}_i &= \varphi_{i1}(z_i^* + \varepsilon_i^*, w_i^*) + \varphi_{i2}(z_i^* + \varepsilon_i^*, w_i^*)(z_{i+1} + \varepsilon_{i+1}) - \varphi_{i2}(z_i^*, w_i^*)z_{i+1} - \tilde{v}_i, \\ \dot{\bar{\varepsilon}}_i &= \bar{h}_i(z^* + \varepsilon^*, w_{v-1}^*) - \bar{h}_i(z^*, w_{v-1}^*) - \bar{v}_i, \quad i = \overline{1, v-1}; \\ \dot{\varepsilon}_v &= \bar{h}_v(z^* + \varepsilon^*, w_v^*) - \bar{h}_v(z^*, w_v^*) - v_v. \end{aligned} \quad (4.62)$$

В данном случае наряду с ограничениями для канонического представления (4.18) делаются предположения об ограниченности мультипликативных составляющих:

$$\left\| \varphi_{i2}(z_i^* + \varepsilon_i^*, w_i^*)(z_{i+1} + \varepsilon_{i+1}) - \varphi_{i2}(z_i^*, w_i^*)z_{i+1} \right\| < \tilde{F}_i = \text{const}, \quad i = \overline{1, v-1}. \quad (4.63)$$

Как и обычно, задача наблюдения сводится к каскадной стабилизации системы (4.62).

Процедура синтеза.

Шаг 1. На первом шаге решается задача обеспечения стабилизации переменных первого блока ε_1 и задача нахождения фиктивного выхода для второго блока системы (4.62). Для решения поставленных задач сформируем комбинированные корректирующие воздействия наблюдателя с компенсирующим слагаемым в следующем виде: $\tilde{v}_1 = \varphi_{11}(z_1 + \varepsilon_1, w_1^*) + \tilde{M}_1 \text{sign} \tilde{\varepsilon}_1$, $\bar{v}_1 = \bar{M}_1 \text{sign} \bar{\varepsilon}_1$, где $\tilde{M}_1, \bar{M}_1 = \text{const} > 0$. С учетом выбранных управлений уравнения первого блока системы (4.62) примут вид:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\varepsilon}}_1 &= \varphi_{12}(z_1 + \varepsilon_1, w_1^*)(z_2 + \varepsilon_2) - \varphi_{12}(z_1, w_1^*)z_2 - \tilde{M}_1 \text{sign} \tilde{\varepsilon}_1, \\ \dot{\bar{\varepsilon}}_1 &= \bar{h}_1(z^* + \varepsilon^*, w_{v-1}^*) - \bar{h}_1(z^*, w_{v-1}^*) - \bar{M}_1 \text{sign} \bar{\varepsilon}_1. \end{aligned} \quad (4.64)$$

При выполнении в системе (4.64) достаточных условий (с учетом (4.18), (4.63) $\tilde{\varepsilon}_1^T \dot{\tilde{\varepsilon}}_1 < 0 \Rightarrow \tilde{M}_1 > \tilde{F}_1$, $\bar{\varepsilon}_1^T \dot{\bar{\varepsilon}}_1 < 0 \Rightarrow \bar{M}_1 > \bar{F}_1$), за конечное время возникают скользящие режимы на многообразиях $\tilde{S}_1 = \{\tilde{\varepsilon}_1 = 0\}$, $\tilde{\varepsilon}_1 = 0 \Rightarrow \tilde{z}_1 = \tilde{y}_1$, $\bar{S}_1 = \{\bar{\varepsilon}_1 = 0\}$, $\bar{\varepsilon}_1 = 0 \Rightarrow \bar{z}_1 = \bar{y}_1$. Из уравнения статики $\dot{\tilde{\varepsilon}}_1 = 0$ находим эквивалентное управление $\tilde{v}_{1\text{eq}} = (\tilde{M}_1 \text{sign} \tilde{\varepsilon}_1)_{\text{eq}} = \varphi_{12}(z_1, w_1^*)\varepsilon_2$, значение которого, как и раньше, может быть получено с помощью линейных фильтров с малыми постоянными времени (2.29), (2.31). Таким образом, на первом шаге получены текущие оценки переменных второго блока системы (4.62) $\varepsilon_2 = v_{1\text{eq}} / \varphi_{12}(z_1, w_1^*)$, $\varphi_{12}(z_1, w_1^*) \neq 0$, из которых будут формироваться корректирующие воздействия, и т. д.

Шаг i ($i = \overline{2, v-1}$). На $(i-1)$ -м шаге, повторяя описанную процедуру, получаем значения эквивалентного управления $\tilde{v}_{(i-1)\text{eq}} = \varphi_{i-1,2}(z_{i-1}^*, w_{i-1}^*)\varepsilon_i$ и текущие оценки переменных

$\varepsilon_i = \tilde{v}_{(i-1)\text{eq}} / \varphi_{i-1,2}(z_{i-1}^*, w_{i-1}^*)$, $\varphi_{i-1,2}(z_{i-1}^*, w_{i-1}^*) \neq 0$, из которых формируем комбинированные корректирующие воздействия для i -го блока системы (4.62): $\tilde{v}_i = \varphi_{i1}(z_i^* + \varepsilon_i^*, w_i^*) + \tilde{M}_i \text{sign} \tilde{\varepsilon}_i$, $\bar{v}_i = \bar{M}_i \text{sign} \bar{\varepsilon}_i$, где $\tilde{M}_i, \bar{M}_i = \text{const} > 0$. С учетом выбранной коррекции уравнения i -го блока принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\varepsilon}}_i &= \varphi_{i2}(z_i^* + \varepsilon_i^*, w_i^*)(z_{i+1} + \varepsilon_{i+1}) - \varphi_{i2}(z_i^*, w_i^*)z_{i+1} - \tilde{M}_i \text{sign} \tilde{\varepsilon}_i, \\ \dot{\bar{\varepsilon}}_i &= \bar{h}_i(z^* + \varepsilon^*, w_{v-1}^*) - \bar{h}_i(z^*, w_{v-1}^*) - \bar{M}_i \text{sign} \bar{\varepsilon}_i, \quad i = \overline{1, v-1}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

В блоке (4.65) при выполнении условий $\tilde{\varepsilon}_i^T \dot{\tilde{\varepsilon}}_i < 0 \Rightarrow \tilde{M}_i > \tilde{F}_i$, $\bar{\varepsilon}_i^T \dot{\bar{\varepsilon}}_i < 0 \Rightarrow \bar{M}_i > \bar{F}_i$, за теоретически конечное время возникнет скользящий режим на многообразиях $\tilde{S}_i = \{\tilde{\varepsilon}_i = 0 \cap \tilde{S}_{i-1}\}$, $\bar{S}_i = \{\bar{\varepsilon}_i = 0 \cap \bar{S}_{i-1}\}$, что обеспечивает стабилизацию переменных $\varepsilon_i = 0 \Rightarrow z_i = y_i$. Из уравнения статики $\dot{\tilde{\varepsilon}}_i = 0$ находим эквивалентное управление $\tilde{v}_{i\text{eq}} = (\tilde{M}_i \text{sign} \tilde{\varepsilon}_i)_{\text{eq}} = \varphi_{i2}(z_i^*, w_i^*)\varepsilon_{i+1}$. Из полученных оценок $\varepsilon_{i+1} = \tilde{v}_{i\text{eq}} / \varphi_{i2}(z_i^*, w_i^*)$, $\varphi_{i2}(z_i^*, w_i^*) \neq 0$ формируются управляющие воздействия наблюдателя для $(i+1)$ -го блока системы (4.62), что приведет к полной стабилизации системы (4.62).

Структурная схема формирования корректирующих воздействий наблюдателя (4.61) на скользящих режимах с компенсирующей составляющей представлена на рис. 4.8.

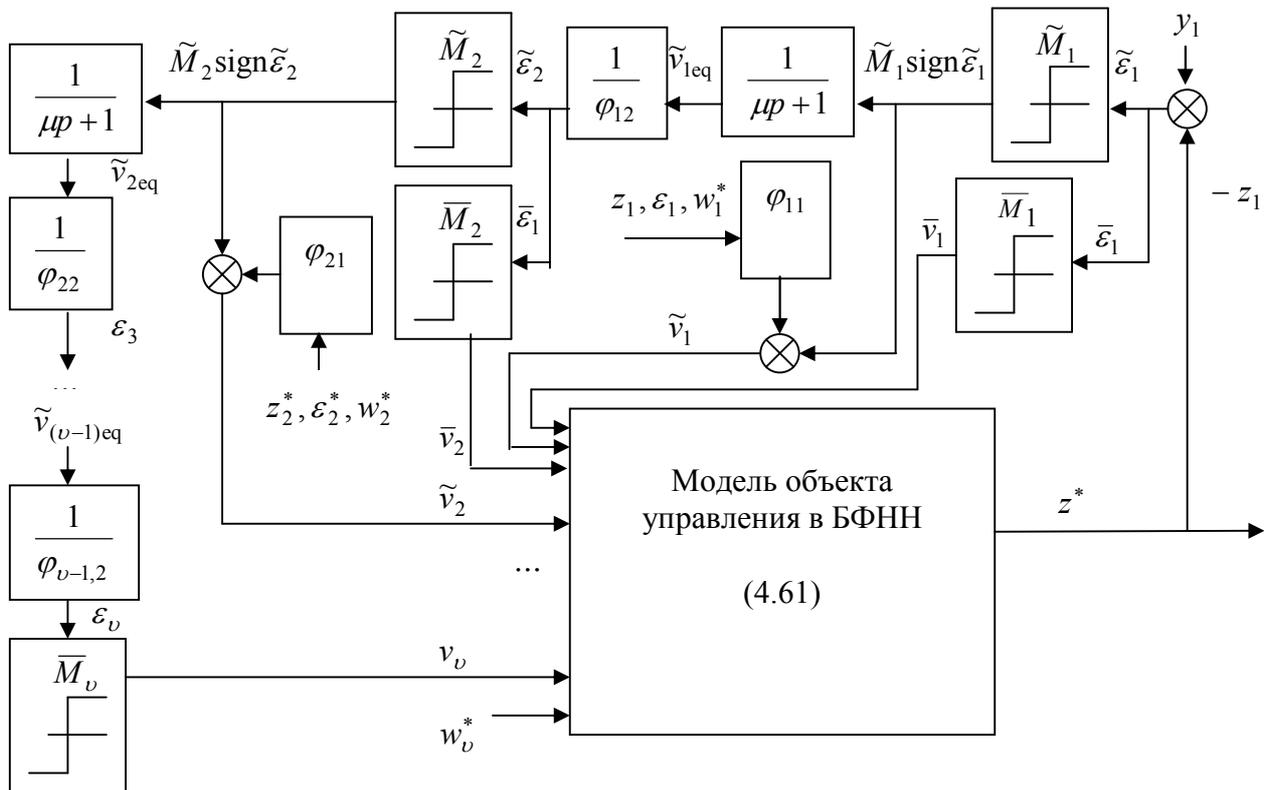


Рис. 4.8. Структурная схема формирования комбинированных корректирующих воздействий наблюдателя на скользящих режимах

Как известно, при использовании разрывных корректирующих воздействий уменьшение амплитуд положительно сказывается на качестве переходного процесса [45]. Заметим, что ограничения (4.18), (4.63) являются избыточными. Если учесть тот факт, что в наблюдателе

на скользящих режимах на i -м шаге переменные предыдущих блоков ε_{i-1}^* равны нулю, можно скорректировать амплитуды разрывных сигналов в сторону уменьшения следующим образом:

$$\begin{aligned} \|\varphi_{i2}(z_{i-1}^*, z_i + \varepsilon_i, w_i^*)(z_{i+1} + \varepsilon_{i+1}) - \varphi_{i2}(z_i^*, w_i^*)z_{i+1}\| &< \tilde{F}_i = \text{const}, \\ \|\Delta \bar{h}_i\| = \|\bar{h}_i(z_{i-1}^*, z_i + \varepsilon_i, \dots, z_\nu + \varepsilon_\nu, w_{\nu-1}^*) - \bar{h}_i(z^*, w_{\nu-1}^*)\| &< \bar{F}_i = \text{const}, \quad i = \overline{1, \nu-1}; \\ \|\Delta \bar{h}_\nu\| = \|\bar{h}_\nu(z_{\nu-1}^*, z_\nu + \varepsilon_\nu, w_\nu^*) - \bar{h}_\nu(z^*, w_\nu^*)\| &< \bar{F}_\nu, \end{aligned} \quad (4.66)$$

что приведет к уменьшению амплитуд \tilde{M}_i, \bar{M}_i разрывных управлений. Если при выборе амплитуд руководствоваться ограничениями (4.66), то тогда стабилизация переменных $(i+1)$ -го блока возможна после возникновения скользящих режимов во всех предыдущих блоках, и поведение переменных системы (4.62) будет описываться следующей логической цепочкой: $\varepsilon_i = 0 \Rightarrow \varepsilon_{i+1} = 0, i = \overline{1, \nu-1}$, т.е. $\tilde{S}_i = \{\tilde{\varepsilon}_i = 0 \cap S_{i-1}\}, \bar{S}_i = \{\bar{\varepsilon}_i = 0 \cap S_{i-1}\}$, области возникновения скользящих режимов в данном случае сужаются по сравнению с замкнутой системой, в которой амплитуды выбираются с учетом ограничений (4.18), (4.63).

Заметим, что покомпонентное формирование амплитуд разрывных воздействий для каждого уравнения блока на основе ограничений по модулю позволит еще больше уменьшить значения амплитуд разрывных управлений.

Замечание 4.6. В задаче управления (стабилизации) нелинейной системой, синтез которой основан на блочном представлении, наряду с блочно-канонической управляемой формой используют также блочно-управляемую «нижнюю треугольную» форму, в которой структура правых частей дифференциальных уравнений аналогична представлению (4.60), т.е. для системы $\dot{x} = h(x) + B(x)u$ вводится представление [29]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= h_r(x_r) + B_r(x_r)x_{r-1}; \quad \dot{x}_i = h_i(x_r, \dots, x_i) + B_i(x_r, \dots, x_i)x_{i-1}, \quad i = \overline{r-1, 2}; \\ \dot{x}_1 &= h_1(x_r, \dots, x_1) + B_1(x_r, \dots, x_1)u, \end{aligned} \quad (4.67)$$

где в каждом i -м блоке вектор x_{i-1} принимается в качестве фиктивного управления, причем $\dim x_i = \text{rank } B_i$. Сравнение блочных форм наблюдаемости (4.60) и управляемости (4.67) показывает, что сохраненные нелинейности в правых частях дифференциальных уравнений – это максимум того, что возможно «оставить» от нелинейной системы в блочном представлении, синтез которого основан на методе разделения движений. Тем самым находится компромисс между преимуществами каскадного синтеза и отражением нелинейных свойств исходной модели объекта управления.

Следует отметить, что представление модели объекта управления в форме (4.67) скорее частный случай, чем общий, поскольку на каждом шаге преобразований к виду (4.67) требуется выполнение достаточно специфических условий [29], а именно, аддитивного вхождения реального вектора x_{i-1} в i -й блок, что не всегда имеет место на практике. В отличие от задач управления в задаче наблюдения при преобразовании к форме (4.60) в i -м блоке аддитивное вхождение вектора y_{i+1} достигается искусственно с учетом структурных свойств наблюдаемости исходной системы.

В заключение данного раздела отметим, что на представление системы (4.1) в БФНН (4.60) также могут быть распространены результаты по каскадному синтезу наблюдателя состояния с конечными коэффициентами, полученные применительно к блочно-каноническому представлению в разделе 4.4. Решение данной задачи в общем виде здесь не приводится ввиду аналогичности выкладок. В прикладной главе 6 будет рассмотрена задача наблюдения для

асинхронного электропривода, модель которого приводится к блочно-наблюдаемой «нижней треугольной» форме типа (4.60). На этом примере будут проиллюстрированы все типы каскадных процедур синтеза наблюдателей состояния, разработанные в данной главе.

В заключение данной главы кратко перечислим полученные результаты.

Каскадный метод распространен на решение задачи наблюдения применительно к нелинейным системам общего вида. По сравнению с известными покомпонентными представлениями модели объекта управления введена блочная форма наблюдаемости нелинейных систем. Разработана процедура получения блочно-канонической формы наблюдаемости нелинейных систем. В терминах преобразованной системы сформулированы ранговые условия локальной наблюдаемости, получены необходимые и достаточные условия локальной наблюдаемости нелинейных систем (раздел 4.2).

Разработана каскадная процедура синтеза наблюдателя состояния на скользящих режимах (с разрывной коррекцией), позволяющая декомпозировать задачу синтеза на независимо решаемые подзадачи меньшей размерности, чем исходная система, и решить задачу наблюдения за теоретически конечное время. Показана грубость предложенных алгоритмов синтеза к параметрическим неопределенностям объекта управления (раздел 4.3).

На основе второго метода Ляпунова показано, что в случае ограниченности по модулю нелинейных слагаемых в правой части дифференциальных уравнений, описывающих модель объекта управления, задача наблюдения решается с заданной точностью при конечных коэффициентах наблюдателя состояния. Для класса нелинейностей, удовлетворяющих условиям Липшица, задача наблюдения решается с конечными коэффициентами и обеспечивается асимптотическая сходимость вектора состояния наблюдателя к вектору состояния объекта управления. Разработаны конструктивные процедуры иерархического выбора конечных коэффициентов наблюдателя на основе неравенств, существенно облегчающие настройку в условиях параметрической неопределенности (раздел 4.4).

Введена блочно-наблюдаемая «нижняя треугольная» форма, в которой в максимально возможной степени отражены нелинейные свойства модели объекта управления (раздел 4.5). Для данной формы разработаны каскадные процедуры синтеза наблюдателя состояния на скользящих режимах.

Глава 5. КАСКАДНЫЙ СИНТЕЗ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ СОСТОЯНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

В данной главе решается задача наблюдения нелинейных систем при наличии внешних возмущений. Как и раньше, решение задачи основывается на структурных свойствах наблюдаемости нелинейных систем с учетом возмущений и построении соответствующей блочной формы, которая является предпосылкой декомпозиции задачи синтеза соответствующего блочного наблюдателя состояния.

5.1. Постановка задачи

Рассмотрим объект управления, модель которого описывается нелинейными дифференциальными уравнениями с аддитивным вхождением внешних неизмеряемых возмущений:

$$\dot{x}(t) = f(x, u) + Q(x)\eta(t), \quad y_1(t) = h(x, u), \quad (5.1)$$

где $x \in X \subset R^n$, $y_1 \in Y_1 \subset R^{m_1}$ – векторы состояний и выходных измерений, $u \in R^r$ – вектор управляющих воздействий. Будем считать, что вектор состояния принадлежит n -мерному дифференциальному многообразию M класса C^∞ , каждая точка которого отождествляется с ее координатами в локальной системе координат X , т.е. вектор-функции $f(x, u)$, $h(x, u)$ и столбцы $q_i(x)$, $i = \overline{1, p}$ нелинейной матрицы $Q(x)$ многократно непрерывно дифференцируемы относительно всех своих аргументов. Для соблюдения данного требования относительно компонент вектора управления u сразу дополним модель объекта управления динамическим компенсатором с устойчивыми собственными движениями (4.2)–(4.3), что позволяет использовать в цепи обратной связи производные (в том числе не гладкие) управляющего воздействия. Компоненты вектора, характеризующего внешние возмущения $\eta(t) \in R^p$, предполагаются произвольными (в том числе не гладкими) ограниченными по модулю функциями времени

$$|\eta_i(t)| \leq \Phi_i = \text{const} > 0, \quad i = \overline{1, p}, \quad \forall t \in [0, \infty). \quad (5.2)$$

Особенность модели объекта управления (5.1) по сравнению с невозмущенной нелинейной системой (4.1) заключается в следующем. Если не возмущенная система наблюдаема (это зависит от ранговых свойств матриц частных производных пары $\{h(x, u), f(x, u)\}$, см. раздел 4.1), то с помощью наблюдателя состояния можно получить оценки всех неизмеряемых компонент вектора состояния. В рассматриваемом случае (5.1) наличие внешних возмущений может привести к уменьшению наблюдаемого подпространства вектора состояния вплоть до полной потери наблюдаемости. Можно предположить, что по аналогии с линейными возмущенными системами (3.1)–(3.2), где наблюдаемое пространство определяется ранговыми свойствами тройки матриц $\{D, \{A, Q\}\}$, в нелинейном случае разрешимость задачи наблюдения будет зависеть от структуры матриц частных производных тройки $\{h(x, u), \{f(x, u), Q(x)\}\}$.

Таким образом, для системы (5.1), так же как и в линейном случае (см. главу 3), ставится задача выявления и оценивания наблюдаемого подпространства вектора состояния максимально возможной размерности и подлежащих восстановлению (в рамках каскадного синтеза наблюдателя состояния на скользящих режимах) линейных комбинаций вектора внешних возмущений.

Согласно методологии каскадного подхода, задача решается в два этапа. На первом этапе (этап конструктивного анализа) исходная модель (5.1) преобразуется к блочно-наблюдаемой форме с учетом возмущений, а именно расщепляется на квазилинейные, канонические блоки, размерности которых соответствуют индексам наблюдаемости системы, что позволяет в явном виде выделить наблюдаемое подпространство и сформулировать ранговые условия наблюдаемости (см. раздел 5.2). На втором этапе (этап каскадного синтеза) на основе полученной блочной формы строится блочный наблюдатель, в каждом блоке которого последовательно решаются элементарные задачи синтеза. В разделе 5.3 проведен каскадный синтез наблюдателя на скользящих режимах, что позволяет последовательно получить за теоретически конечное время оценки неизмеряемых компонент вектора состояния и возмущений. В разделе 5.4 приводятся результаты по количественной оценке снизу конечных коэффициентов наблюдателей состояния, что позволяет решить задачу оценки компонент вектора состояния с заданной точностью и с сохранением декомпозиции процедуры синтеза. В разделе 5.5 разработана процедура прямого каскадного синтеза наблюдателя состояния на скользящих режимах с синхронным анализом, т.е. без предварительных преобразований к блочно-наблюдаемой форме.

5.2. Конструктивный анализ структурных свойств наблюдаемости

В данном разделе разработана пошаговая процедура приведения нелинейной системы (5.1) к блочной форме наблюдаемости с учетом возмущений. Процедура состоит из конечного числа шагов и заключается в расщеплении исходной системы на блоки, размерность которых соответствует индексам наблюдаемости с учетом возмущений. Конструктивность процедуры заключается в том, что структура системы с точки зрения наблюдаемости раскрывается в ходе локальных преобразований, по окончании которых преобразованная система готова к каскадному синтезу. На каждом шаге процедуры выполняются интегральные преобразования, суть которых подробно описана ниже для первого шага. Этот метод, разработанный в [29, 45] на основе использования аппарата дифференциальной геометрии [35] для представления нелинейных систем частного вида в регулярной форме относительно управлений, применяется в данном случае для представления блоков наблюдаемой формы нелинейной системы в регулярной форме наблюдаемости с учетом внешних возмущений. В результате преобразований выделяется наблюдаемое независимо от внешних возмущений подпространство вектора состояния максимальной размерности, а также линейные комбинации компонент вектора возмущений, которые могут быть восстановлены с помощью наблюдателя состояния на скользящих режимах.

Процедура анализа.

Шаг 1. Без ограничения общности предположим, что в системе (5.1) выполняется условие $\text{rank}\{\partial h(x, u) / \partial x\} = m_1$, $m_1 < n$.

а) Расщепим вектор состояния системы (5.1) на два подвектора $x = \text{col}(\bar{x}_1, x_1)$, $x_1 \in R^{n-m_1}$ и проведем диффеоморфную замену локальных координат $\bar{x}_1 \rightarrow y_1$, $\dim \bar{x}_1 = \dim y_1 = m_1$. Представим систему (5.1) с учетом обозначений (4.3) относительно новых переменных $x \rightarrow \text{col}(y_1, x_1)$:

$$\dot{y}_1 = h_1(y_1, x_1, w_1^*) + Q_1(y_1, x_1, w_0^*)\eta, \quad \dot{x}_1 = f_1(y_1, x_1, w_0^*) + Q_{x_1}(y_1, x_1, w_0^*)\eta. \quad (5.3)$$

Обозначим $\text{rank}\{Q_1, \partial h_1 / \partial x_1\} = d_1$, $\text{rank} Q_1(y_1, x_1, w_0^*) = p_1$ и предположим, что $p_1 < d_1 \leq m_1$.

Тогда первое уравнение системы (5.3) можно расщепить на два уравнения с помощью перестановки компонент так, чтобы в выражениях

$$\begin{aligned}\dot{\hat{y}}_1 &= \hat{h}_1(\hat{y}_1, \hat{y}_1, x_1, w_1^*) + \hat{Q}_1(\hat{y}_1, \hat{y}_1, x_1, w_0^*)\eta, \\ \dot{\hat{y}}_1 &= \hat{h}_1(\hat{y}_1, \hat{y}_1, x_1, w_1^*) + \hat{Q}_1(\hat{y}_1, \hat{y}_1, x_1, w_0^*)\eta, \\ y_1 &= \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_1 \end{pmatrix}, \quad \hat{y}_1 \in R^{m_1-p_1}, \quad \hat{y}_1 \in R^{p_1}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} \hat{Q}_1 \\ \hat{Q}_1 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (5.4)$$

выполнялось условие $\text{rank} Q_1 = \text{rank} \hat{Q}_1 = p_1$, $\dim \hat{Q}_1 = (m_1 - p_1) \times p$, $\dim \hat{Q}_1 = p_1 \times p$.

Мы еще не делали предположений относительно размерности вектора внешних возмущений в исходной системе (5.1). Вообще говоря, она может быть как меньше, так больше или равна размерности вектора состояния. Поскольку $m_1 < n$, в первом уравнении системы (5.3) возможны следующие варианты: $n > p \Rightarrow m_1 > p$ или $m_1 = p$, или $m_1 < p$; $n = p \Rightarrow \Rightarrow m_1 < p$; $n < p \Rightarrow m_1 < p$. В свою очередь $p_1 \leq p$. Из условия $p_1 < d_1 \leq m_1$ следует, что при этом в первом уравнении системы (5.3) должны выполняться условия $n > p \Rightarrow m_1 > p \geq p_1$ или $m_1 = p > p_1$, или $m_1 < p$ и $p_1 < p$; $n = p \Rightarrow m_1 < p$ и $p_1 < p$; $n < p \Rightarrow m_1 < p$ и $p_1 < p$, и только в случае $n > p \Rightarrow m_1 > p = p_1$ матрица перед возмущениями Q_1 в первом уравнении системы (5.3) имеет полный ранг. Во всех остальных случаях ее ранг неполный. В этом более общем случае налагаем связи на компоненты вектора η в уравнениях (5.4) $\eta = \hat{Q}_1^+ \phi_1$, $\phi_1 \in R^{p_1}$ так, чтобы получить матрицу $Q_1^*(y_1, x_1, w_0^*)$ размером $m_1 \times p_1$ полного ранга, а именно

$$Q_1^* = Q_1 \hat{Q}_1^+ = \begin{pmatrix} \hat{Q}_1 \hat{Q}_1^+ \\ I_{p_1} \end{pmatrix}, \quad \text{rank} Q_1^*(y_1, x_1, w_0^*) = p_1, \quad (5.5)$$

где $\hat{Q}_1^+ = \hat{Q}_1^T (\hat{Q}_1 \hat{Q}_1^T)^{-1}$ – псевдообратная матрица.

б) Цель преобразований данного пункта состоит в приведении системы (5.4) к регулярной форме относительно возмущений η . Пусть A – алгебра дифференцируемых функций класса C^∞ , определенных на M_1 , вектор y_1 принадлежит m_1 -мерному дифференциальному многообразию $M_1 \subset M$ класса C^∞ . Требуется найти такую диффеоморфную замену локальных координат

$$y_1' = \psi_1(y_1, w_0^*), \quad \hat{y}_1 = \hat{y}_1, \quad (5.6)$$

чтобы правая часть дифференциальных уравнений относительно компонент вектора y_1' , $\dim y_1' = \dim \hat{y}_1 = m_1 - p_1$ не зависела от возмущений:

$$\dot{y}_1' = h_1'(y_1', \hat{y}_1, x_1, w_1^*), \quad \dot{\hat{y}}_1 = \hat{h}_1(y_1', \hat{y}_1, x_1, w_1^*) + \hat{Q}_1(y_1', \hat{y}_1, x_1, w_0^*)\eta. \quad (5.7)$$

Принципиальное отличие рассматриваемого нелинейного случая $Q_1^*(y_1, x_1, w_0^*)$ от линейного (т.е. $Q_1^* = \text{const}$) состоит в том, что для получения в явном виде нелинейной вектор-функции $\psi_1(y_1, w_0^*)$ (5.6) требуется выполнять интегральные преобразования. Напомним,

что в случае линейной возмущенной системы (см. раздел 3.2) приведение к регулярной форме относительно внешних возмущений на первом шаге заключалось в перестановке строк и разбиением вектора y_1 на подвекторы, из которых последовательно были получены (как линейная комбинация, зависящая от матриц с постоянными коэффициентами), новые компоненты вектора состояния с нужными свойствами. Таким же образом мы расщепляли бы и систему (5.7), если бы $Q_1^* = \text{const}$. Следует отметить, что даже если в исходной системе (5.1) матрица Q содержит только постоянные коэффициенты, то после замены переменных $x \rightarrow \text{col}(y_1, x_1)$ в первом уравнении системы (5.3) $\dot{y}_1 = \frac{\partial h_1}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial h_1}{\partial u} \dot{u} = \frac{\partial h_1}{\partial x} f + \frac{\partial h_1}{\partial x} Q\eta + \frac{\partial h_1}{\partial u} u$ в общем случае мы получим нелинейную матрицу перед вектором возмущений η , зависящую от компонент вектора состояния и управления: $(\partial h_1 / \partial x)Q = Q_1(y_1, x_1, w_0^*)$ и, следовательно, $Q_1^*(y_1, x_1, w_0^*)$. В другом частном случае, а именно $p_1 = 0$ (т.е. при отсутствии возмущений в первом уравнении системы (5.3)), процедура получения блока наблюдаемой формы свелась бы к процедуре для нелинейной невозмущенной системы (см. раздел 4.2), в результате которой путем перестановки строк выделяется фиктивный выход для второго блока наблюдаемой формы.

Замечание 5.1. В задаче наблюдения в терминах блочного подхода существенно требование, чтобы преобразование (5.6) не зависело от x_1 . Данное требование обусловлено дальнейшей каскадной процедурой синтеза разрывных управляющих воздействий наблюдателя состояния (см. раздел 4.3), которые могут быть функциями только от переменных, известных на момент формирования управления в наблюдателе. На первом шаге – это выходные переменные y_1 , переменные вектора $w_0^*(t)$ (как функции времени) считаются известными.

С учетом (5.4), (5.6) первое уравнение системы (5.7) принимает вид

$$\dot{y}_1' = \frac{\partial \psi_1}{\partial \hat{y}_1} \dot{\hat{y}}_1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial \hat{y}_1} \dot{\hat{y}}_1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial w_0^*} \dot{w}_0^* = \frac{\partial \psi_1}{\partial \hat{y}_1} (\hat{h}_1 + \hat{Q}_1 \eta) + \frac{\partial \psi_1}{\partial \hat{y}_1} (\hat{h}_1 + \hat{Q}_1 \eta) + \frac{\partial \psi_1}{\partial w_0^*} w_0^*. \quad (5.8)$$

Правая часть уравнения (5.8) не будет зависеть от возмущений, если вектор-функция $\psi_1(\hat{y}_1, \hat{y}_1, w_0^*)$ является корнем матричного уравнения в частных производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_1(\hat{y}_1, \hat{y}_1, w_0^*)}{\partial \hat{y}_1} \hat{Q}_1(\hat{y}_1, \hat{y}_1, x_1, w_0^*) \eta + \frac{\partial \psi_1(\hat{y}_1, \hat{y}_1, w_0^*)}{\partial \hat{y}_1} \hat{Q}_1(\hat{y}_1, \hat{y}_1, x_1, w_0^*) \eta = \\ = \frac{\partial \psi_1(y_1, w_0^*)}{\partial y_1} Q_1^*(y_1, x_1, w_0^*) = 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Рассмотрим в касательном пространстве $T_1(M_1)$ многообразия M_1 допустимое подпространство $T_1'(M_1)$, порожденное набором p_1 векторных полей $T_1'(M_1) = \text{span}\{q_{1_{m_1-p_1+1}}^*, q_{1_{m_1-p_1+2}}^*, \dots, q_{1_{m_1}}^*\}$, где

$$\begin{aligned} q_{1_{m_1-p_1+1}}^*(y_1, x_1, w_0^*) = q_{1_1}^{m_1-p_1+1}(y_1, x_1, w_0^*) \frac{\partial}{\partial y_{1_1}} + \dots + q_{1_{m_1}}^{m_1-p_1+1}(y_1, x_1, w_0^*) \frac{\partial}{\partial y_{1_{m_1}}}, \dots, \\ q_{1_{m_1}}^*(y_1, x_1, w_0^*) = q_{1_1}^{m_1} \frac{\partial}{\partial y_{1_1}}(y_1, x_1, w_0^*) + \dots + q_{1_{m_1}}^{m_1}(y_1, x_1, w_0^*) \frac{\partial}{\partial y_{1_{m_1}}}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Вследствие (5.5) векторные поля (5.10) линейно независимы в каждой точке $y_1 \in M_1$, т.е. $\dim T_1'(M_1) = p_1$. Будем искать подмногообразие $M_1' \subset M_1$ максимальной размерности p_1 , определяемое функциями $\psi_i(y_1, w_0^*) \in A$, $i = \overline{1, m_1 - p_1}$, которые не зависят от компонент вектора x_1 и принимают в каждой точке $y_1 \in M_1'$ постоянное значение

$$\begin{aligned} \psi_1 = c_1, \quad \psi_1 = \text{col}(\psi_{11}, \dots, \psi_{1_{m_1-p_1}}), \quad \text{rank}\{\partial\psi_1 / \partial y_1\} \neq 0, \\ c_1 = \text{col}(c_{11}, \dots, c_{1_{m_1-p_1}}), \quad c_{1j} = \text{const}, \quad j = \overline{1, m_1 - p_1}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

и такое, что касательное пространство $T_1(M_1')$ подмногообразия M_1' , состоящее из операторов частных дифференцирований от функций $\psi_{1j}(y_1, w_0^*) \in A$, $j = \overline{1, m_1 - p_1}$ содержится в допустимом подпространстве $T_1'(M_1)$, т.е. $T_1(M_1') \subseteq T_1'(M_1)$. Другими словами, в каждой точке $y_1 \in M_1'$ линейные операторы (5.10) отображают функции ψ_{1j} в нуль, где

$$\begin{aligned} q_{1_i}^*(\psi_{1_j}, x_1, w_0^*) = q_{1_i}^i(y_1, x_1, w_0^*) \frac{\partial \psi_{1_j}}{\partial y_{1_i}} + \dots + q_{1_{m_1}}^i(y_1, x_1, w_0^*) \frac{\partial \psi_{1_j}}{\partial y_{1_{m_1}}}, \\ i = \overline{m_1 - p_1 + 1, m_1}, \quad j = \overline{1, m_1 - p_1}, \end{aligned}$$

что соответствует матричному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial \psi_1(y_1, w_0^*)}{\partial y_1} Q_1^*(y_1, x_1, w_0^*) = 0. \quad (5.12)$$

Заметим, что размерность определенного таким образом подмногообразия M_1' не может превышать размерность допустимого подпространства $T_1'(M_1)$, но может оказаться и меньше, если решения в частных производных (5.12) окажутся несовместными.

С целью определения функций, задающих M_1' , т.е. нахождения совместного решения уравнений (5.12), построим в касательном пространстве $T_1^*(M_1)$, сопряженном для $T_1(M_1)$, подпространство $\bar{T}_1^*(M_1) = \text{span}\{\mathcal{G}_{11}, \dots, \mathcal{G}_{1_{m_1-p_1}}\}$, образованное ковекторами

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{11}(d) = \mathcal{G}_{11}^1(y_1, w_0^*) dy_{1_1} + \dots + \mathcal{G}_{1_{m_1}}^1(y_1, w_0^*) dy_{1_{m_1}}, \dots, \\ \mathcal{G}_{1_{m_1-p_1}}(d) = \mathcal{G}_{11}^{m_1-p_1}(y_1, w_0^*) dy_{1_1} + \dots + \mathcal{G}_{1_{m_1}}^{m_1-p_1}(y_1, w_0^*) dy_{1_{m_1}} \end{aligned} \quad (5.13)$$

и являющегося аннулятором допустимого подпространства $T_1'(M_1)$ в каждой точке $y_1 \in M_1$,

$$\langle \mathcal{G}_{1_j} \cdot q_{y_1}^* \rangle = 0, \quad i = \overline{m_1 - p_1 + 1, m_1}, \quad j = \overline{1, m_1 - p_1}. \quad (5.14)$$

Условие (5.14) с учетом дуальности базисов $dy_{1_1}, \dots, dy_{1_{m_1}}$ и $\partial / \partial y_{1_1}, \dots, \partial / \partial y_{1_{m_1}}$ соответственного подпространства $T_1^*(M_1)$ и $T_1'(M_1)$ записывается в виде матричного уравнения

$$\Theta_1(y_1, w_0^*)Q_1^*(y_1, x_1, w_0^*) = 0, \quad (5.15)$$

где матрица $\Theta_1(y_1, w_0^*)$ размером $(m_1 - p_1) \times m_1$ составлена из коэффициентов линейных дифференциальных 1-форм (5.13) и не зависит от компонент вектора x_1 .

В каждой точке $y_1 \in M_1'$ дифференциальные 1-формы (5.13) должны обращаться в нуль, т.е. функции $\psi_{1_j}(y_1, w_0^*)$, $j = \overline{1, m_1 - p_1}$ должны удовлетворять так называемой системе уравнений Пфаффа $\mathcal{G}_{1_1}^j(y_1, w_0^*)dy_{1_1} + \dots + \mathcal{G}_{1_{m_1}}^j(y_1, w_0^*)dy_{1_{m_1}} = 0$, $j = \overline{1, m_1 - p_1}$, где $dy_1 = \text{col}(dy_{1_1}, \dots, dy_{1_{m_1}})$, или в матричной форме

$$\Theta_1(y_1, w_0^*)dy_1 = 0. \quad (5.16)$$

Очевидно, что ковекторы (5.13) в каждой точке $y_1 \in M_1'$ линейно независимы, поэтому ранг системы Пфаффа (5.16) равен $m_1 - p_1$. Следовательно, компоненты зависимого вектора $d\hat{y}_1$, $d\hat{y}_1 = \text{col}(d\hat{y}_{1_1}, \dots, d\hat{y}_{1_{m_1-p_1}})$ можно выразить через компоненты независимого вектора $d\hat{y}_1$, $d\hat{y}_1 = \text{col}(d\hat{y}_{1_{m_1-p_1+1}}, \dots, d\hat{y}_{1_{m_1}})$ и тем самым определить коэффициенты системы Пфаффа (5.16) через параметры системы (5.3). С этой целью представим уравнения (5.16) и (5.15) с учетом (5.5) в виде

$$\hat{\Theta}_1(y_1, w_0^*)d\hat{y}_1 + \hat{\Theta}_1(y_1, w_0^*)d\hat{y}_1 = 0, \quad (5.17)$$

$$\hat{\Theta}_1(y_1, w_0^*)\hat{Q}_1(y_1, x_1, w_0^*)\hat{Q}_1^+(y_1, x_1, w_0^*) + \hat{\Theta}_1(y_1, w_0^*) = 0, \quad (5.18)$$

где $dy_1 = \text{col}(d\hat{y}_1, d\hat{y}_1)$, $\Theta_1 = (\hat{\Theta}_1 \quad \hat{\Theta}_1)$, $\dim \hat{\Theta}_1(y_1, w_0^*) = (m_1 - p_1) \times (m_1 - p_1)$, $\dim \hat{\Theta}_1(y_1, w_0^*) = (m_1 - p_1) \times p_1$. Очевидно, что матрицу $\hat{\Theta}_1$ в выражениях (5.17), (5.18) можно задать произвольно и независимо от компонент вектора x_1 . Полагая $\hat{\Theta}_1(y_1, w_0^*) = I_{m_1-p_1}$, находим из уравнения (5.18) $\hat{\Theta}_1(y_1, w_0^*) = -\hat{Q}_1(y_1, x_1, w_0^*)\hat{Q}_1^+(y_1, x_1, w_0^*)$.

Замечание 5.2. Из требований, предъявляемых в задаче наблюдения к аргументам вектор-функции $\psi_1(y_1, w_0^*)$ (см. замечание 5.1), следует требование к аргументам нелинейной матрицы $\Theta_1(y_1, w_0^*)$, и, следовательно, матрицы $\hat{\Theta}_1(y_1, w_0^*)$, а именно, произведение матриц $\hat{Q}_1(y_1, x_1, w_0^*)\hat{Q}_1^+(y_1, x_1, w_0^*)$ не должно зависеть от компонент вектора x_1 .

Данное требование не нарушается в частном случае $\hat{\Theta}_1(y_1, w_0^*) = -\hat{Q}_1(y_1, w_0^*)\hat{Q}_1^+(y_1, w_0^*)$, т.е. когда элементы матриц $\hat{Q}_1(y_1, w_0^*)$, $\hat{Q}_1^+(y_1, w_0^*)$ не зависят от компонент вектора x_1 . В случае зависимости нелинейной матрицы $\hat{\Theta}_1(y_1, x_1, w_0^*)$ от компонент вектора x_1 для первого уравнения системы (5.3), следует рассмотреть возможность приведения к частично регулярной форме относительно внешних возмущений вида

$$\begin{aligned} \dot{y}_1'' &= h_1''(y_1, x_1, w_1^*), \quad y_1'' \in R^{m_1-p_1-p_1''}, \\ \dot{y}_1''' &= h_1'''(y_1, x_1, w_1^*) + Q_1'''(y_1, x_1, w_0^*)\eta, \quad y_1''' \in R^{p_1''}, \\ \dot{\hat{y}}_1 &= \hat{h}_1(y_1, x_1, w_1^*) + \hat{Q}_1(y_1, x_1, w_0^*)\eta, \quad \hat{y}_1 \in R^{p_1}, \end{aligned}$$

которая отличается от регулярной формы (5.7) тем, что размерность подвектора y_1'' , в правую часть дифференциальных уравнений относительно которого не входят возмущения, меньше на величину p_1''' соответствующего подвектора $y_1' \in R^{m_1-p_1}$ в системе (5.7). В этом

случае задача сводится к перебору возможных расщеплений матрицы $\hat{Q}_1 : Q_1 = \begin{pmatrix} \hat{Q}_1 \\ \hat{Q}_1 \end{pmatrix}$,

$\hat{Q}_1 = \begin{pmatrix} \hat{Q}_1' \\ \hat{Q}_1''' \end{pmatrix}$, $\text{rank} Q_1 = \text{rank} \hat{Q}_1 = p_1$. Из полученных вариантов расщепления и соответствующих им систем

$$\begin{aligned} \hat{y}_1'' &= \hat{h}_1(y_1, x_1, w_1^*) + \hat{Q}_1'(y_1, x_1, w_0^*)\eta, \quad \hat{y}_1'' \in R^{m_1-p_1-p_1''}, \\ \hat{y}_1''' &= \hat{h}_1'''(y_1, x_1, w_1^*) + \hat{Q}_1'''(y_1, x_1, w_0^*)\eta, \quad \hat{y}_1''' \in R^{p_1''}, \\ \hat{y}_1 &= \hat{h}_1(y_1, x_1, w_1^*) + \hat{Q}_1(y_1, x_1, w_0^*)\eta, \quad \hat{y}_1 \in R^{p_1} \end{aligned}$$

выбирается тот, в котором при выполнении условий

$$\begin{aligned} y_1'' &= \psi_1''(y_1, w_0^*) \Rightarrow \hat{\Theta}_1'(y_1, w_0^*) = (\hat{\Theta}_1' \quad \hat{\Theta}_1'), \\ \dim \hat{\Theta}_1'(y_1, w_0^*) &= (m_1 - p_1 - p_1''') \times (m_1 - p_1 - p_1'''), \quad \dim \hat{\Theta}_1'(y_1, w_0^*) = (m_1 - p_1 - p_1''') \times p_1, \\ \hat{\Theta}_1'(y_1, w_0^*) &= -\hat{Q}_1'(y_1, x_1, w_0^*)\hat{Q}_1^+(y_1, x_1, w_0^*) \end{aligned}$$

размерность вектора \hat{y}_1' максимальная из диапазона $0 < \dim \hat{y}_1' < m_1 - p_1$, а $\dim \hat{y}_1''' = p_1'''$, соответственно, минимальная. Если соответствующий вектор \hat{y}_1' не может быть выделен, т.е. $\dim \hat{y}_1' = 0$, то второе уравнение системы (5.3) является ненаблюдаемой (в терминах блочных форм наблюдаемости) относительно измеряемого вектора y_1 .

Тот факт, что матрицы перед возмущающими воздействиями в системе (5.3) зависят от компонент всего вектора состояния, сужает класс нелинейных наблюдаемых систем при наличии внешних возмущений по сравнению с линейными (см. раздел 3.2, где матрицы перед возмущающими воздействиями на всех этапах процедуры преобразований к блочно-наблюдаемой форме зависят только от постоянных коэффициентов).

Предположим, что в системе (5.18) указанное требование к аргументам нелинейной матрицы $\hat{\Theta}_1'(y_1, w_0^*)$ выполняется. Тогда получаем систему Пфаффа (5.16) в виде

$$d\hat{y}_1 + A_1(y_1, w_0^*)d\hat{y}_1 = 0, \quad A_1 = -\hat{Q}_1\hat{Q}_1^+. \quad (5.19)$$

Таким образом, задание в каждой точке $y_1 \in M_1$ допустимого подпространства $T_1'(M_1)$ с базисом (5.10) равносильно заданию системы Пфаффа (5.19), определенной с точностью до замены эквивалентной системой. Если в окрестности каждой точки $y_1 \in M_1'$ проходит единственное p_1 -мерное многообразие (5.11), являющееся интегральным для системы (5.19), то такая система Пфаффа называется вполне интегрируемой. Для вполне интегрируемых систем вида (5.19) разработаны различные методы интегрирования, один из которых сводится к последовательному интегрированию системы $d\hat{y}_1 / d\tau = -A_1(\hat{y}_1(\tau), \hat{y}_1(\tau), w_0^*)(d\hat{y}_1 / d\tau) = 0$ с параметром τ по ломаному пути, состоящему из p_1 звеньев. При интегрировании вдоль каж-

дого звена все компоненты векторов x_1 и \hat{y}_1 (кроме одной \hat{y}_{1_i} , $i = \overline{m_1 - p_1 + 1, m_1}$, принятой в качестве независимой переменной интегрирования: $\hat{y}_{1_i} = \tau$) остаются постоянными. Поэтому решение системы (5.19) сводится к решению на каждом из p_1 шагов системы обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $m_1 - p_1$. В результате p_1 шагов интегрирования находится интегральное подмногообразие M_1' в явном виде

$$\hat{y}_1 = \overline{\psi}_1(\hat{y}_1, w_0^*, c_1), \quad (5.20)$$

где $\overline{\psi}_1 = \text{col}(\overline{\psi}_{1_1}, \dots, \overline{\psi}_{1_{m_1-p_1}})$, $c_1 = \text{col}(c_{1_1}, \dots, c_{1_{m_1-p_1}})$, $\overline{\psi}_1$ – функция, для которой с учетом (5.20) справедливо следующее соотношение: $\partial \overline{\psi}_1 / \partial \hat{y}_1 = A_1(\overline{\psi}_1(\hat{y}_1, w_0^*, c_1), \hat{y}_1, w_0^*)$. Разрешая уравнение (5.20) относительно постоянных интегрирования $c_{1_1}, \dots, c_{1_{m_1-p_1}}$, получаем $m_1 - p_1$ независимых интегральных поверхностей

$$\psi_{1_j}(\hat{y}_1, \hat{y}_1, w_0^*) = c_{1_j}, \quad j = \overline{1, m_1 - p_1}, \quad (5.21)$$

вдоль которых ковекторы (5.10) обращаются в нуль.

Покажем теперь, что функции ψ_{1_j} , $j = \overline{1, m_1 - p_1}$, задающие подмногообразие (5.21), удовлетворяют решению уравнения в частных производных (5.12). Действительно, находим дифференциалы $d\psi_{1_j}$ в силу системы Пфаффа (5.19)

$$d\psi_{1_j} = \frac{\partial \psi_{1_j}}{\partial y_1} dy_1 = \frac{\partial \psi_{1_j}}{\partial \hat{y}_1} d\hat{y}_1 + \frac{\partial \psi_{1_j}}{\partial \hat{y}_1} d\hat{y}_1 = \left(\frac{\partial \psi_{1_j}}{\partial \hat{y}_1} \hat{Q}_1 \hat{Q}_1^+ + \frac{\partial \psi_{1_j}}{\partial \hat{y}_1} \right) d\hat{y}_1,$$

где $\frac{\partial \psi_{1_j}}{\partial y_1} = \text{col} \left(\frac{\partial \psi_{1_j}}{\partial \hat{y}_1}, \frac{\partial \psi_{1_j}}{\partial \hat{y}_1} \right)$, $j = \overline{1, m_1 - p_1}$. Полученные выражения должны тождественно обращаться в каждой точке $y_1 \in M_1'$ в нуль при любом значении вектора $d\hat{y}_1$. Следовательно, получаем тождества $\frac{\partial \psi_{1_j}}{\partial \hat{y}_1} \hat{Q}_1 \hat{Q}_1^+ + \frac{\partial \psi_{1_j}}{\partial \hat{y}_1} \equiv 0$, $j = \overline{1, m_1 - p_1}$ или

$$\frac{\partial \psi_{1_j}}{\partial y_1} Q_1^* \equiv 0, \quad j = \overline{1, m_1 - p_1}, \quad (5.22)$$

что и требовалось доказать. Вводим новую локальную систему координат (5.6), в которой уравнение

$$\dot{y}_1' = \frac{\partial \psi_1(y_1, w_0^*)}{\partial y_1} h_1(y_1, x_1, w_1^*) + \frac{\partial \psi_1(y_1, w_0^*)}{\partial y_1} Q_1^*(y_1, x_1, w_0^*) \phi + \frac{\partial \psi_1(y_1, w_0^*)}{\partial w_0^*} \dot{w}_0^* \quad (5.23)$$

вследствие тождества (5.22) не зависит от вектора возмущений η , что позволяет после обратной замены переменных $\hat{y}_1 = \psi_1^{-1}(y_1', \hat{y}_1, w_0^*)$ в выражении (5.23) получить первое уравнение системы (5.3) в регулярной форме относительно возмущений (5.7).

в) Если в системе (5.7) выполняется условие $d_1 < m_1$, то ее первое уравнение с помощью перестановки строк можно расщепить на две подсистемы $\dot{\tilde{y}}_1 = \tilde{h}_1(y_1, x_1, w_1^*)$, $\dot{\bar{y}}_1 = \bar{h}_1(y_1, x_1, w_1^*)$, где $y_1' = \text{col}(\tilde{y}_1, \bar{y}_1)$, $\tilde{y}_1 \in R^{d_1 - p_1}$, $\bar{y}_1 \in R^{m_1 - d_1}$, так, чтобы $\text{rank}\{\partial \tilde{h}_1 / \partial x_1\} = d_1 - p_1 = m_2$. Предполагается, что $m_2 < n - m_1$. Далее переходим ко второму шагу процедуры, на котором преобразования, описанные на первом шаге, применяются к системе $\dot{x}_1 = f_1(y_1, x_1, w_1^*) + Q_{x_1}(y_1, x_1, w_0^*)\eta$, $x_1 \in R^{n - m_1}$, $y_2 = \tilde{h}_1(y_1, x_1, w_1^*)$, $y_2 \in R^{m_2}$, где вектор y_2 , не зависящий от внешних возмущений, рассматривается в качестве фиктивного выхода, и т.д.

Обоснуем преобразования пункта (б) с помощью следующей теоремы.

Теорема 5.1. Первое уравнение системы (5.3) приводимо к регулярной форме относительно возмущений (5.7) тогда и только тогда, когда на дифференцируемом многообразии M_1 существует подмногообразие M_1' такое, что для $y_1 \in M_1'$ выполняются условия

- 1) $M_1' \cap M_1 = \{ y_1 : y_{1j} = \overline{\psi_{1j}}(y_{1m_1 - p_1 + 1}, \dots, y_{1m_1}, w_0^*, c_1), j = \overline{1, m_1 - p_1} \}$;
- 2) $A_1(\overline{\psi}_1(\hat{y}_1, w_0^*, c_1), \hat{y}_1, w_0^*) = \partial \overline{\psi}_1 / \partial \hat{y}_1$.

Доказательство теоремы 5.1. Согласно теореме Фробениуса [35] существование подмногообразия M_1' гарантируется в том и только в том случае, когда внешние производные ковекторов (5.13) тождественно равны нулю

$$d\mathcal{G}_{1j}(d) = 0, \quad j = \overline{1, m_1 - p_1}, \quad (5.24)$$

что эквивалентно тождественному обращению в нуль внешних произведений

$$d\mathcal{G}_{1j}(d) \wedge \mathcal{G}_{11}(d) \wedge \mathcal{G}_{12}(d) \wedge \dots \wedge \mathcal{G}_{1m_1 - p_1}(d) = 0, \quad j = \overline{1, m_1 - p_1}, \quad (5.25)$$

где \wedge – символ внешнего умножения. Условие (5.24) означает, что элементы матрицы $\Theta(y_1, w_0^*)$ непосредственно являются градиентами

функций ψ_{1j} , $j = \overline{1, m_1 - p_1}$. Из условия (5.25) следует, что матрица $\Theta_1(y_1, w_0^*)$ преобразуется в матрицу Якоби функций ψ_{1j} , $j = \overline{1, m_1 - p_1}$ после некоторого невырожденного преобразования $D_1(y_1, w_0^*)\Theta_1(y_1, w_0^*)$, где $D_1(y_1, w_0^*)$ – матрица интегрирующих множителей, $\dim D_1 = (m_1 - p_1) \times (m_1 - p_1)$.

При выполнении условий (5.24) или (5.25) внешние производные $d\mathcal{G}_{1j}(d)$, $j = \overline{1, m_1 - p_1}$ линейно разлагаются по базисным формам (5.13). Поэтому при внешнем дифференцировании не возникает дополнительных связей на независимые ковекторы $dy_{1m_1 - p_1 + 1}, \dots, dy_{1m_1}$, что и гарантирует существование интегрального многообразия M_1' .

Для построенной системы Пфаффа в виде (5.19), когда $\Theta_1(y_1, w_0^*) = (I_{m_1 - p_1} \quad A_1)$, условия полной интегрируемости (5.24) и (5.25) можно свести к одному условию, а именно тождественное равенство нулю внешних производных линейных форм

$$\mathcal{G}_{1j}(d) = dy_{1j} + a_{1m_1 - p_1 + 1}^j dy_{1m_1 - p_1 + 1} + \dots + a_{1m_1}^j dy_{1m_1}, \quad j = \overline{1, m_1 - p_1},$$

вычисленных в силу самой системы, $A_1 = \{a_{1i}^j\}$, $i = \overline{m_1 - p_1 + 1, m_1}$, $j = \overline{1, m_1 - p_1}$.

Сформулированное условие можно выписать в явном виде. С этой целью, используя свойства внешнего дифференцирования и внешнего умножения, находим

$$\begin{aligned}
d\mathcal{G}_{1j}(d) &= d\left(dy_{1j} + \sum_{i_0=m_1-p_1+1}^{m_1} a_{1i_0}^j \cdot dy_{1i_0}\right) = \\
&= ddy_{1j} + \sum_{i_0=m_1-p_1+1}^{m_1} da_{1i_0}^j \wedge dy_{1i_0} + \sum_{i_0=m_1-p_1+1}^{m_1} a_{1i_0}^j \wedge ddy_{1i_0} = \\
&= \sum_{i_0=m_1-p_1+1}^{m_1} \left(\sum_{i_1=1}^{m_1-p_1} \frac{\partial a_{1i_0}^j}{\partial y_{1i_1}} \wedge dy_{1i_1} + \sum_{i_2=m_1-p_1+1}^{m_1} \frac{\partial a_{1i_0}^j}{\partial y_{1i_2}} \wedge dy_{1i_2} \right) \wedge dy_{1i_0}.
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Выразим из (5.19) зависимые ковекторы dy_{1i_1} как функции независимых ковекторов

$$dy_{1i_2} : dy_{1i_1} = - \sum_{i_2=m_1-p_1+1}^{m_1} a_{1i_2}^{i_1} \cdot dy_{1i_2}, \quad i_1 = \overline{1, m_1 - p_1}, \quad i_2 = \overline{m_1 - p_1 + 1, m_1}$$

(5.26). Далее выносим за скобки знак суммирования по индексу i_2 и получаем

$$d\mathcal{G}_{1j}(d) = \sum_{i_0=m_1-p_1+1}^{m_1} \sum_{i_2=m_1-p_1+1}^{m_1} \left(\sum_{i_1=1}^{m_1-p_1} a_{1i_2}^{i_1} \frac{\partial a_{1i_0}^j}{\partial y_{1i_1}} + \frac{\partial a_{1i_0}^j}{\partial y_{1i_2}} \right) dy_{1i_2} \wedge dy_{1i_0}, \quad j = \overline{1, m_1 - p_1}.$$

Полученные равенства будут тождественно выполняться, если для каждой пары различных чисел α и β , взятых из набора чисел $\{m_1 - p_1 + 1, \dots, m_1\}$, коэффициенты при билинейных формах $dy_{1\alpha} \wedge dy_{1\beta}$ и $dy_{1\beta} \wedge dy_{1\alpha}$, вычисленные в любой точке $y_1 \in M_1'$, равны между собой. Таким образом, условием полной интегрируемости системы (5.19) или существования многообразия (5.20) является выполнение следующих симметричных тождеств:

$$\frac{\partial a_{1\alpha}^j}{\partial y_{1\beta}} - \sum_{i=1}^{m_1-p_1} a_{1\beta}^i \frac{\partial a_{1\alpha}^j}{\partial y_{1i}} \equiv \frac{\partial a_{1\beta}^j}{\partial y_{1\alpha}} - \sum_{i=1}^{m_1-p_1} a_{1\alpha}^i \frac{\partial a_{1\beta}^j}{\partial y_{1i}}, \quad j = \overline{1, m_1 - p_1}, \tag{5.27}$$

число которых составляет $C_{m_1-p_1}^2 = \frac{(m_1 - p_1)p_1!}{2(p_1 - 2)!}$.

Таким образом, задача о приводимости к регулярной форме относительно возмущений имеет решение лишь для класса систем, в котором выполняются условия теоремы Фробениуса [35], что сужает класс рассматриваемых систем (5.1).

Пример 5.1. Наиболее наглядно условие интегрируемости (условие теоремы Фробениуса) можно представить для уравнения Пфаффа (5.19)

$$\mathcal{G}_1(d) = a_1(y_1, t)dy_{1_1} + a_2(y_1, t)dy_{1_2} + a_3(y_1, t)dy_{1_3} = 0, \quad y_1 = \text{col}(y_{1_1}, y_{1_2}, y_{1_3}),$$

записанного для первого уравнения системы (5.3) ($m_1 = 3, p = p_1 = 2$) с матрицей перед возмущениями $Q_1(y_1, x_1)$ в виде

$$Q_1 = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} \\ q_{12} & q_{22} \\ q_{13} & q_{23} \end{pmatrix}, \quad Q_1(y_1, x_1) = \begin{pmatrix} \hat{Q}_1(y_1, x_1) \\ \hat{Q}_1(y_1, x_1) \end{pmatrix}, \quad \hat{Q}_1 = (q_{11} \quad q_{21}), \quad \hat{Q}_1 = \begin{pmatrix} q_{12} & q_{22} \\ q_{13} & q_{23} \end{pmatrix},$$

где предполагается, что $\det \hat{Q}_1 = q_{12}q_{23} - q_{13}q_{22} \neq 0$ для всех $y_1, x_1 \geq 0$. Для существования интеграла $\psi(y_1, y_2, y_3) = c$, $\psi \in R$ этого уравнения необходимо и достаточно тождественное равенство нулю коэффициентов билинейной формы (условие (5.24))

$$d\mathcal{G}_1(d) = \left(\frac{\hat{a}_3}{\hat{y}_{1_2}} - \frac{\hat{a}_2}{\hat{y}_{1_3}} \right) dy_{1_2} \wedge dy_{1_3} + \left(\frac{\hat{a}_1}{\hat{y}_{1_3}} - \frac{\hat{a}_3}{\hat{y}_{1_1}} \right) dy_{1_3} \wedge dy_{1_1} + \left(\frac{\hat{a}_2}{\hat{y}_{1_1}} - \frac{\hat{a}_1}{\hat{y}_{1_2}} \right) dy_{1_1} \wedge dy_{1_2} \equiv 0$$

или коэффициента трилинейной формы (условие (5.25))

$$d\mathcal{G}_1(d) \wedge \mathcal{G}_1 = \left[a_1 \left(\frac{\hat{a}_3}{\hat{y}_{1_2}} - \frac{\hat{a}_2}{\hat{y}_{1_3}} \right) + a_2 \left(\frac{\hat{a}_1}{\hat{y}_{1_3}} - \frac{\hat{a}_3}{\hat{y}_{1_1}} \right) + a_3 \left(\frac{\hat{a}_2}{\hat{y}_{1_1}} - \frac{\hat{a}_1}{\hat{y}_{1_2}} \right) \right] \times dy_{1_1} \wedge dy_{1_2} \wedge dy_{1_3} \equiv 0.$$

В первом случае ковекторное поле $\mathcal{G}(d)$ является потенциальным ("вихрь" поля равен нулю). Во втором случае (ковектор $\mathcal{G}(d)$ ортогонален своему "вихрю") существует интегрирующий множитель $\mu(y_1)$, после умножения на который, поле $\mathcal{G}(d)$ становится потенциальным. Условия (5.27) в данном случае принимают следующий вид:

$$\frac{\partial a_3^1}{\partial y_{1_2}} - a_2^1 \frac{\partial a_3^1}{\partial y_{1_1}} \equiv \frac{\partial a_2^1}{\partial y_{1_3}} - a_3^1 \frac{\partial a_2^1}{\partial y_{1_1}},$$

где $A_1 = -\hat{Q}_1 \hat{Q}_1^{-1} = (a_2^1 \ a_3^1)$, $a_1 = 1$, $a_2 = a_2^1$, $a_3 = a_3^1$. В исследуемой задаче предполагается, что произведение $\hat{Q}_1 \hat{Q}_1^{-1}$ и, следовательно, коэффициенты $(a_2^1 \ a_3^1)$ не зависят от компонент вектора x_1 . Следует отметить, что условия интегрируемости (5.27) всегда выполняются для нелинейной системы (5.3) со скалярным возмущением.

Дадим также численную иллюстрацию данного примера. В качестве первого уравнения системы (5.3) рассмотрим систему третьего порядка ($m_1 = 3$, $p = p_1 = 2$) вида

$$\begin{aligned} \dot{y}_{1_1} &= h_{1_1}(y_1, x_1, w_1^*) + (y_{1_2}^3 + 2y_{1_1}y_{1_3})\eta_1 + \left(2\frac{y_{1_1}}{y_{1_2}} + 4y_{1_1}\frac{y_{1_3}}{y_{1_2}} + 2y_{1_2}^2 \right)\eta_2, \\ \dot{y}_{1_2} &= h_{1_2}(y_1, x_1, w_1^*) + y_{1_2}y_{1_3}x_{1_2}\eta_1 + (1 + 2y_{1_3}x_{1_2})\eta_2, \\ \dot{y}_{1_3} &= h_{1_3}(y_1, x_1, w_1^*) + y_{1_2}\eta_1 + 2\eta_2, \end{aligned}$$

где ранг матрицы $Q_1(y_1, x_1)$ полный и равен двум. В качестве базисного минора данной матрицы можно выбрать минор

$$\hat{Q}_1(y_1, x_1) = \begin{pmatrix} y_{1_2}y_{1_3}x_{1_2} & 1 + 2y_{1_3}x_{1_2} \\ y_{1_2} & 2 \end{pmatrix},$$

так как $\det \hat{Q}_1 = -y_{1_2} \neq 0$. Соответственно, компонентами вектора \hat{y}_1 выберем переменные y_{1_2} и y_{1_3} , тогда $\hat{y}_1 = y_{1_1}$ и

$$\widehat{Q}_1 = \begin{pmatrix} y_{1_2}^3 + 2y_{1_1}y_{1_3} & 2\frac{y_{1_1}}{y_{1_2}} + 4y_{1_1}\frac{y_{1_3}}{y_{1_2}} + 2y_{1_2}^2 \end{pmatrix}.$$

Система, эквивалентная системе Пфаффа (5.19), в данном случае имеет вид

$$\mathcal{G}_1^1(d) \equiv dy_{1_1} + a_2^1(y_1)dy_{1_2} + a_3^1(y_1)dy_{1_3} = 0, \quad A_1 = (a_2^1 \quad a_3^1) = -\widehat{Q}_1\widehat{Q}_1^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2y_{1_1}}{y_{1_2}} & -y_{1_2}^2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что, хотя элементы матрицы перед возмущениями $Q_1(y_1, x_1)$ зависят от второй компоненты x_{1_2} вектора x_1 , произведение $\widehat{Q}_1\widehat{Q}_1^{-1}$ в данном случае зависит только от компонент измеряемого вектора y_1 и требование к аргументам выражения $A_1(y_1)$ не нарушается. Условие интегрируемости [35]

$$\frac{\partial a_3^1}{\partial y_{1_2}} - a_2^1 \frac{\partial a_3^1}{\partial y_{1_1}} \equiv \frac{\partial a_2^1}{\partial y_{1_3}} - a_3^1 \frac{\partial a_2^1}{\partial y_{1_1}}, \quad -2y_{1_2} \equiv -(-y_{1_2}^2)\left(-\frac{2}{y_{1_2}}\right)$$

выполняется, поэтому коэффициенты уравнения Пфаффа, представленного в виде

$$dy_{1_1} = \frac{2y_{1_1}}{y_{1_2}} dy_{1_2} + y_{1_2}^2 dy_{1_3},$$

являются частными производными $\partial y_{1_1} / \partial y_{1_3} = y_{1_2}^2$, $\partial y_{1_1} / \partial y_{1_2} = 2y_{1_1} / y_{1_2}$. Подставляя решение первого уравнения $y_{1_1} = y_{1_2}^2 y_{1_3} + cy_{1_2}^2$ во второе, получаем $d(cy_{1_2}^2) / dy_{1_2} = 2cy_{1_2}^2 / y_{1_2}$.

Итак, уравнение интегральной поверхности уравнения Пфаффа имеет вид $y_{1_1} = y_{1_2}^2 y_{1_3} + cy_{1_2}^2$ или $\psi(y_1) = y_{1_1} / y_{1_2}^2 - y_{1_3} = c$. Вводим новые переменные $y_1' = y_{1_1} / y_{1_2}^2 - y_{1_3}$, $\hat{y}_{1_1} = y_{1_2}$, $\hat{y}_{1_2} = y_{1_3}$, дифференцируя которые и вводя обратное преобразование, получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{y}_1' &= h_1'(y_1', \hat{y}_1, x_1, w_1^*), \quad y_1' \in R, \\ \dot{\hat{y}}_{1_1} &= \hat{h}_{1_1}(y_1', \hat{y}_1, x_1, w_1^*) + \hat{y}_{1_1}\hat{y}_{1_2}\bar{x}_{1_2}\eta_1 + (1 + 2\hat{y}_{1_2}x_{1_2})\eta_2, \\ \dot{\hat{y}}_{1_2} &= \hat{h}_{1_2}(y_1', \hat{y}_1, x_1, w_1^*) + \hat{y}_{1_1}\eta_1 + 2\eta_2, \quad \hat{y}_1 \in R^2, \end{aligned}$$

являющуюся регулярной формой относительно возмущений.

Шаг i. Продолжая указанную процедуру, на i -м шаге рассмотрим систему

$$\dot{x}_{i-1} = f_{i-1}(y_{i-1}^*, x_{i-1}, w_{i-1}^*) + Q_{x(i-1)}(y_{i-1}^*, x_{i-1}, w_{i-2}^*)\eta, \quad y_i = \tilde{h}_{i-1}(y_{i-1}^*, x_{i-1}, w_{i-1}^*), \quad (5.28)$$

где $x_{i-1} \in R^{n-m_1-\dots-m_{i-1}}$, $\dim y_i = \text{rank}\{\partial \tilde{h}_{i-1} / \partial x_{i-1}\} = m_i$. Здесь и далее используются обозначения типа $y_i^* = \text{col}(y_1, y_2, \dots, y_i)$, $y_i = \text{col}(\tilde{y}_i, \bar{y}_i, \hat{y}_i)$, $y_i^{**} = \text{col}(\tilde{y}_1, \bar{y}_1, \tilde{y}_2, \bar{y}_2, \dots, \tilde{y}_i, \bar{y}_i)$, $\hat{y}_i^* = \text{col}(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_i)$.

а) В предположении $\dim x_{i-1} > m_i$ проведем расщепление не преобразованного вектора

состояния $x_{i-1} = \text{col}(\bar{x}_i, x_i)$, $x_i \in R^{n-m_1-\dots-m_i}$ и диффеоморфную замену локальных координат $\bar{x}_i \rightarrow y_i$, $\dim \bar{x}_i = \dim y_i = m_i$, $x_{i-1} \rightarrow \text{col}(y_i, x_i)$ и представим систему (5.28) в виде

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= h_i(y_i^*, x_i, w_i^*) + Q_i(y_i^*, x_i, w_{i-1}^*)\eta, \\ \dot{x}_i &= f_i(y_i^*, x_i, w_{i-1}^*) + Q_{xi}(y_i^*, x_i, w_{i-1}^*)\eta. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Введем обозначения $\text{rank}\{Q_i, \partial h_i / \partial x_i\} = d_i$, $\text{rank} Q_i(y_i^*, x_i, w_{i-1}^*) = p_i$. Предполагая, что $p_i < d_i \leq m_i$, расщепляем первое уравнение системы (5.29) так, чтобы в системе

$$\begin{aligned} \dot{\hat{y}}_i &= \hat{h}_i(y_i^*, x_i, w_i^*) + \hat{Q}_i(y_i^*, x_i, w_{i-1}^*)\eta, \\ \dot{\hat{y}}_i &= \hat{h}_i(y_i^*, x_i, w_i^*) + \hat{Q}_i(y_i^*, x_i, w_{i-1}^*)\eta, \\ y_i &= \begin{pmatrix} \hat{y}_i \\ \hat{y}_i \end{pmatrix}, \hat{y}_i \in R^{m_i-p_i}, \hat{y}_i \in R^{p_i}, Q_i = \begin{pmatrix} \hat{Q}_i \\ \hat{Q}_i \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.30)$$

выполнялось условие $\text{rank} Q_i = \text{rank} \hat{Q}_i = p_i$, где $\dim \hat{Q}_i = (m_i - p_i) \times p$, $\dim \hat{Q}_i = p_i \times p$. Заметим, что только в случае $m_i > p = p_i$ матрица возмущений Q_i имеет полный ранг (этот факт означает, что на предыдущих шагах $p_j = 0$, $j = \overline{1, i-1}$, и интегральных преобразований не требовалось). Если $p_i < p$, то налагаем связи на компоненты вектора η в уравнениях (5.30) $\eta = \hat{Q}_i^+ \phi_i$, $\phi_i \in R^{p_i}$, чтобы получить матрицу $Q_i^*(y_i^*, x_i, w_{i-1}^*)$ размером $m_i \times p_i$ полного ранга:

$$Q_i^* = Q_i \hat{Q}_i^+ = \begin{pmatrix} \hat{Q}_i \hat{Q}_i^+ \\ I_{p_i} \end{pmatrix}, \text{rank} Q_i^*(y_i^*, x_i, w_{i-1}^*) = p_i, \quad (5.31)$$

где $\hat{Q}_i^+ = \hat{Q}_i^T (\hat{Q}_i \hat{Q}_i^T)^{-1}$ – псевдообратная матрица.

б) Для сведения системы (5.30) к регулярной форме относительно возмущений требуется найти диффеоморфную замену локальных координат

$$y_i' = \psi_i(y_{i-1}^{**}, y_i, w_{i-1}^*), y_i' \in R^{m_i-p_i}, \hat{y}_i = \hat{y}_i \quad (5.32)$$

такую, чтобы правые части дифференциальных уравнений относительно y_i' не зависели от возмущений

$$\begin{aligned} \dot{y}_i' &= \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial \tilde{y}_j} \dot{\tilde{y}}_j + \frac{\partial \psi_i}{\partial \bar{y}_j} \dot{\bar{y}}_j \right) + \frac{\partial \psi_i}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial \psi_i}{\partial \hat{y}_i} \dot{\hat{y}}_i + \frac{\partial \psi_i}{\partial w_{i-1}^*} \dot{w}_{i-1}^* = \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial \tilde{y}_j} \tilde{h}_j + \frac{\partial \psi_i}{\partial \bar{y}_j} \bar{h}_j \right) + \frac{\partial \psi_i}{\partial y_i} (\hat{h}_i + \hat{Q}_i \eta) + \frac{\partial \psi_i}{\partial \hat{y}_i} (\hat{h}_i + \hat{Q}_i \eta) + \frac{\partial \psi_i}{\partial w_{i-1}^*} \dot{w}_{i-1}^* \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial \hat{y}_i} \hat{Q}_i + \frac{\partial \psi_i}{\partial \tilde{y}_i} \hat{Q}_i \right) \eta = 0 \Rightarrow \frac{\partial \psi_i(y_{i-1}^{**}, y_i, w_{i-1}^*)}{\partial y_i} Q_i^*(y_i^*, x_i, w_{i-1}^*) = 0, \end{aligned}$$

и в числе аргументов вектор-функции $y'_i = \psi_i(y_{i-1}^{**}, y_i, w_{i-1}^*)$ не было компонент векторов x_i (поскольку на соответствующем шаге процедуры синтеза корректирующих воздействий наблюдателя они полагаются не известными) и \hat{y}_{i-1}^* (поскольку правые части дифференциальных уравнений относительно данных компонент содержат возмущения), компоненты вектора $w_{i-1}^*(t)$ как функции времени полагаются известными.

Опуская промежуточные выкладки, запишем соответствующую систему Пфаффа порядка $(m_i - p_i)$ в виде, аналогичном (5.19): $d\hat{y}_i + A_i(y_{i-1}^{**}, y_i, w_{i-1}^*)d\hat{y}_i = 0$, где $A_i(y_{i-1}^{**}, y_i, w_{i-1}^*) = -\hat{Q}_i(y_i^*, x_i, w_{i-1}^*)\hat{Q}_i^+(y_i^*, x_i, w_{i-1}^*)$.

Требование к аргументам вектор-функции $\psi_i(y_{i-1}^{**}, y_i, \eta_{i-1}^*)$ не будет нарушено, если произведение матриц $\hat{Q}_i(y_i^*, x_i, w_{i-1}^*)\hat{Q}_i^+(y_i^*, x_i, w_{i-1}^*)$ не зависит от компонент векторов x_i и \hat{y}_{i-1}^* . В противном случае следует рассмотреть возможность приведения системы (5.30) к частично регулярной форме относительно возмущений (см. замечание 5.2).

Предполагая, что указанные требования к аргументам матрицы $A_i(y_{i-1}^{**}, y_i, w_{i-1}^*)$ выполняются, интегральные поверхности соответствующей системы Пфаффа при условии их существования находим в явном виде [35]:

$$\hat{y}_i = \bar{\psi}_i(y_{i-1}^{**}, \hat{y}_i, w_{i-1}^*, c_i), \quad (5.33)$$

где $c = \text{col}(c_{i1}, \dots, c_{i m_i - p_i})$ – постоянные интегрирования, $\bar{\psi}_i = \text{col}(\bar{\psi}_{i1}, \dots, \bar{\psi}_{i m_i - p_i})$, $\partial \bar{\psi}_i / \partial \hat{y}_i = A_i(y_{i-1}^{**}, \bar{\psi}_i(y_{i-1}^{**}, y_{i-1}, \hat{y}_i, w_{i-1}^*, c_i), \hat{y}_i, w_{i-1}^*)$. Разрешая уравнение (5.33) относительно постоянных интегрирования, получаем $m_i - p_i$ независимых интегральных поверхностей $\psi_{ij}(y_{i-1}^{**}, y_i, w_{i-1}^*) = c_{ij}$, $j = \overline{1, m_i - p_i}$. Вводим новую локальную систему координат (5.32), что позволяет после обратной замены переменных $\hat{y}_i = \psi_i^{-1}(y_{i-1}^{**}, y_i', \hat{y}_i)$ получить первое уравнение системы (5.29) в полной регулярной форме относительно возмущений

$$\dot{y}_i' = h_i'(y_i^*, x_i, w_i^*), \quad \dot{\hat{y}}_i = \hat{h}_i(y_i^*, x_i, w_i^*) + \hat{Q}_i(y_i^*, x_i, w_{i-1}^*)\eta. \quad (5.34)$$

в) Если $d_i < m_i$, то первое уравнение системы (5.34) можно перестановкой строк расщепить на две подсистемы $\dot{\tilde{y}}_i = \tilde{h}_i(y_i^*, x_i, w_i^*)$, $\dot{\bar{y}}_i = \bar{h}_i(y_i^*, x_i, w_i^*)$, $y_i' = \text{col}(\tilde{y}_i, \bar{y}_i)$, $\tilde{y}_i \in R^{d_i - p_i}$, $\bar{y}_i \in R^{m_i - d_i}$, где $\text{rank}\{\partial \tilde{h}_i / \partial x_i\} = d_i - p_i = m_{i+1}$.

В предположении, что $m_{i+1} < n - m_1 - \dots - m_i$, переходим к следующему $(i+1)$ -му шагу процедуры, на котором описанные преобразования применяются к системе

$$\dot{x}_i = f_i(y_i^*, x_i, w_i^*) + Q_{xi}(y_i^*, x_i, w_{i-1}^*)\eta, \quad y_{i+1} = \tilde{h}_i(y_i^*, x_i, w_i^*),$$

где вектор y_{i+1} ($\dim y_{i+1} = \text{rank}\{\partial \tilde{h}_i / \partial x_i\} = m_{i+1}$), не зависящий от внешних возмущений, рассматривается в качестве фиктивного выхода, и т.д.

На каждом шаге размерность непреобразованного вектора x_i уменьшается, и процедура заканчивается за конечное число шагов. В данном случае, в отличие от нелинейной невозмущенной системы (см. раздел 4.2), имеют место три возможных условия окончания процедуры.

Предположим, что на ν -м шаге выполнилось одно из условий окончания процедуры.

Если выполнилось условие

$$\dim x_\nu = m_{\nu+1} = n - m_1 - \dots - m_\nu, \quad (*)$$

процедура закончится, и после неособой замены переменных $x_\nu \rightarrow y_{\nu+1}$, $\dim x_\nu = \dim y_{\nu+1} = m_{\nu+1}$ будет получена полная блочно-наблюдаемая форма с учетом возмущений, состоящая из $(\nu + 1)$ блоков, каждый из которых (кроме последнего) расщеплен в общем случае на три подблока относительно преобразованных переменных $y_i = \text{col}(\tilde{y}_i, \bar{y}_i, \hat{y}_i)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{y}}_i &= y_{i+1}, \quad \dot{\bar{y}}_i = \bar{h}_i(y_{\nu+1}^*, w_\nu^*), \quad \dot{\hat{y}}_i = \hat{h}_i(y_{\nu+1}^*, w_\nu^*) + \hat{Q}_i(y_{\nu+1}^*, w_\nu^*)\eta, \quad i = \overline{1, \nu}; \\ \dot{y}_{\nu+1} &= h_{\nu+1}(y_{\nu+1}^*, w_{\nu+1}^*) + Q_{\nu+1}(y_{\nu+1}^*, w_\nu^*)\eta, \end{aligned} \quad (5.35)$$

где в силу процедуры $\bar{y}_i \in R^{m_i - d_i}$, $y_{i+1} = \tilde{h}_i(y_i^*, x_i, w_i^*)$, $\dim y_{i+1} = \dim \tilde{y}_i = \text{rank}\{\partial \tilde{h}_i / \partial x_i\} = d_i - p_i = m_{i+1}$, $\text{rank} \hat{Q}_i = \dim \hat{y}_i = p_i$, $\text{rank} Q_{\nu+1} = p_{\nu+1}$. Числа $m_1, \dots, m_{\nu+1}$ – индексы наблюдаемости системы (5.1) с учетом возмущений, $m_1 + \dots + m_{\nu+1} = n$, $(\nu + 1)$ – показатель наблюдаемости возмущенной системы, и вектор состояния полностью наблюдаем.

Как будет показано в разделе 5.3, построение наблюдателя на скользящих режимах позволит также получить оценки линейных комбинаций $\hat{Q}_i(y_{\nu+1}^*, w_\nu^*)\eta$, $i = \overline{1, \nu}$; $Q_{\nu+1}(y_{\nu+1}^*, w_\nu^*)\eta$ при условии, что параметры вектор-функций $\hat{h}_i(y_{\nu+1}^*, w_\nu^*)$, $i = \overline{1, \nu}$, $h_{\nu+1}(y_{\nu+1}^*, w_{\nu+1}^*)$ известны. Если

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \hat{Q}_1 \\ \dots \\ \hat{Q}_\nu \\ Q_{\nu+1} \end{pmatrix} = \bar{p} = p,$$

то однозначно восстанавливаются и все компоненты вектора возмущений. В случае $\bar{p} < p$ будет восстановлена линейная комбинация компонент вектора возмущений максимально возможного ранга \bar{p} .

Замечание 5.3. По аналогии с «нижней треугольной» блочной формой наблюдаемости нелинейной невозмущенной системы (см. раздел 4.5), первые уравнения блоков формы (5.35) также представимы в виде

$$\dot{\tilde{y}}_i = \varphi_{i1}(y_i^*, w_i^*) + \varphi_{i2}(y_i^*, w_i^*)y_{i+1}, \quad i = \overline{1, \nu}, \quad (5.36)$$

где нелинейные вектор-функции $\varphi_{i1}(y_i^*, w_i^*)$, $\varphi_{i2}(y_i^*, w_i^*)$ могут быть выделены в процессе преобразований в соответствии со структурой оператора системы (5.1). Представление (5.35) с учетом (5.36) в максимально возможной степени отражает нелинейные свойства исходной системы (5.1), кроме того, преобразования к блочной форме могут существенно упроститься.

Если на ν -м шаге при $A_\nu(y_{\nu-1}^{**}, \hat{y}_{\nu-1}^*, y_\nu, x_\nu, w_{\nu-1}^*) = -\hat{Q}_\nu(y_\nu^*, x_\nu, w_{\nu-1}^*)\hat{Q}_\nu^+(y_\nu^*, x_\nu, w_{\nu-1}^*)$ в системе

$$\begin{aligned}\dot{y}_v'' &= h_v''(y_v^*, x_v, w_v^*), \quad y_v'' \in R^{m_v - p_v - p_v''}, \\ \dot{y}_v''' &= h_v'''(y_v^*, x_v, w_v^*) + Q_v'''(y_v^*, x_v, w_{v-1}^*)\eta, \quad y_v''' \in R^{p_v''}, \\ \dot{\hat{y}}_v &= \hat{h}_v(y_v^*, x_v, w_v^*) + \hat{Q}_v(y_v^*, x_v, w_{v-1}^*)\eta, \quad \hat{y}_v \in R^{p_v}\end{aligned}$$

выполняется условие

$$p_v''' = m_v - p_v \quad (\dim \hat{y}_v' = 0) \quad \text{или} \quad p_v''' < m_v - p_v \quad \text{и} \quad \text{rank}\{\partial h_v'' / \partial x_v\} = 0 \quad (**)$$

или условие

$$p_v = d_v, \quad (***)$$

то исходная система (5.1) преобразуется к неполной наблюдаемой форме вида

$$\begin{aligned}\tilde{y}_i &= y_{i+1}, \quad \dot{\tilde{y}}_i = \bar{h}_i(y_v^*, x_v, w_{v-1}^*), \\ \dot{\hat{y}}_i &= \hat{h}_i(y_v^*, x_v, w_{v-1}^*) + \hat{Q}_i(y_v^*, x_v, w_{v-1}^*)\eta, \quad i = \overline{1, v-1}; \\ \dot{y}_v &= h_v(y_v^*, x_v, w_v^*) + Q_v(y_v^*, x_v, w_{v-1}^*)\eta; \\ \dot{x}_v &= f_v(y_v^*, x_v, w_{v-1}^*) + Q_{xv}(y_v^*, x_v, w_{v-1}^*)\eta, \quad x_v \in R^{n-m_1-\dots-m_v}.\end{aligned} \quad (5.37)$$

Резервы наблюдаемости в системе (5.37) еще не исчерпаны, поскольку в нелинейном случае мы не исключали перед каждым i -м шагом базисные миноры матрицы \hat{Q}_{i-1} из уравнений относительно x_{i-1} как в линейном случае (см. раздел 3.2). В нелинейном случае таких преобразований было бы недостаточно, поскольку фиктивный выход $y_i = \tilde{h}_{i-1}(y_{i-1}^*, x_{i-1}, w_{i-1}^*)$ зависит от всех компонент системы (в отличие от линейного случая, где $y_i = D_{i-1}x_{i-1}$), и в уравнении

$$\dot{y}_i = \frac{\partial \tilde{h}_{i-1}}{\partial y_{i-1}^*} \dot{y}_{i-1}^* + \frac{\partial \tilde{h}_{i-1}}{\partial x_{i-1}} \dot{x}_{i-1} + \frac{\partial \tilde{h}_{i-1}}{\partial w_{i-1}^*} \dot{w}_{i-1}^*$$

все вытесненные базисные миноры матриц \hat{Q}_j , $j = \overline{1, i-1}$ из уравнений относительно x_{i-1} могли бы опять появиться за счет первого слагаемого правой части, и для их аннуляции опять потребовались бы интегральные преобразования.

Составим вектор y_v^* , $\dim y_v^* = p_1 + p_2 + \dots + p_{v-1} + m_v = m_v^*$ из правых частей уравнений относительно \hat{y}_i , $i = \overline{1, v-1}$; \dot{y}_v системы (5.37):

$$\begin{aligned}y_v^* &= h_v^*(y_v^*, x_v, w_v^*) + Q_v^{**}(y_v^*, x_v, w_{v-1}^*)\eta, \\ h_v^* &= \begin{pmatrix} \hat{h}_1(y_v^*, x_v, w_{v-1}^*) \\ \dots \\ \hat{h}_{v-1}(y_v^*, x_v, w_{v-1}^*) \\ h_v(y_v^*, x_v, w_v^*) \end{pmatrix}, \quad Q_v^{**} = \begin{pmatrix} \hat{Q}_1(y_v^*, x_v, w_{v-1}^*) \\ \dots \\ \hat{Q}_{v-1}(y_v^*, x_v, w_{v-1}^*) \\ Q_v(y_v^*, x_v, w_{v-1}^*) \end{pmatrix}.\end{aligned} \quad (5.38)$$

В отличие от линейного случая в уравнении (5.38) возможно выполнение условия $p_v^* < d_v^*$,

где $\text{rank}\{Q_v^{**}, \partial h_v^* / \partial x_v\} = d_v^*$, $\text{rank} Q_v^{**} = p_v^*$. Тогда расщепляем уравнение (5.38) так, чтобы в системе

$$\begin{aligned} \hat{y}_v^* &= \hat{h}_v^*(y_v^*, x_v, w_v^*) + \hat{Q}_v^{**}(y_v^*, x_v, w_{v-1}^*)\eta, \\ \hat{y}_v^* &= \hat{h}_v^*(y_v^*, x_v, w_v^*) + \hat{Q}_v^{**}(y_v^*, x_v, w_{v-1}^*)\eta, \\ y_v^* &= \begin{pmatrix} \hat{y}_v^* \\ \hat{y}_v^* \end{pmatrix}, \hat{y}_v \in R^{m_v^* - p_v^*}, \hat{y}_v \in R^{p_v^*}, Q_v^{**} = \begin{pmatrix} \hat{Q}_v^{**} \\ \hat{Q}_v^{**} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.39)$$

выполнялось условие $\text{rank} Q_v^{**} = \text{rank} \hat{Q}_v^{**} = p_v^*$, где $\dim \hat{Q}_v^{**} = (m_v^* - p_v^*) \times p$, $\dim \hat{Q}_v^{**} = p_v^* \times p$. Если $p_v^* < p$, то налагаем связи на компоненты вектора η в уравнениях (5.39) $\eta = \hat{Q}_v^{**+} \phi_v^*$, $\phi_v^* \in R^{p_v^*}$, чтобы получить матрицу Q_v^* размером $m_v^* \times p_v^*$ полного ранга:

$$Q_v^* = Q_v^{**} \hat{Q}_v^{**+} = \begin{pmatrix} \hat{Q}_v^{**} \hat{Q}_v^{**+} \\ I_{p_v^*} \end{pmatrix}, \text{rank} Q_v^* = p_v^*,$$

где $\hat{Q}_v^{**+} = \hat{Q}_v^{**T} (\hat{Q}_v^{**} \hat{Q}_v^{**T})^{-1}$ – псевдообратная матрица. В силу того, что система уравнений (5.39) является алгебраической, для приведения ее к регулярной форме относительно возмущений интегральных преобразований не потребуется (заметим, что данный факт будет использован в разделе 4.5 для прямого синтеза наблюдателя на скользящих режимах). Если все строки произведения матриц

$$\hat{Q}_v^{**}(y_v^*, x_v, w_{v-1}^*) \hat{Q}_v^{**+}(y_v^*, x_v, w_{v-1}^*) \quad (5.40)$$

зависят от компонент вектора x_v , то процедура заканчивается, и компоненты $x_v \in R^{n - m_1 - \dots - m_v}$ (последнее уравнение системы (5.37) образуют ненаблюдаемое подпространство). Если произведение матриц (5.40) не зависит от компонент вектора x_v , то вектор $y_{v+1} \in R^{m_v^* - p_v^*}$ (или его часть, соответствующая строкам (5.40), не зависящим от x_v), $y_{v+1} = \hat{y}_v^* - \hat{Q}_v^{**} \hat{Q}_v^{**+} \hat{y}_v^* = h_{v+1}(y_v^*, x_v, w_v^*)$, который не зависит от возмущений, принимается в качестве фиктивного выхода для последнего уравнения системы (5.37), и описанная процедура повторяется. Если на шаге $(v + k_1)$, $k_1 \geq 1$ выполнилось условие типа (*), то процедура заканчивается, и весь вектор состояния исходной системы наблюдаем; если выполнены условия типа (**) или (***), то вновь формируется вектор $y_{v+1+k_1}^*$ вида (5.38) и т.д.

Таким образом, при выполнении на шаге $(v + k_2)$, $k_2 > k_1$ условия (**), или (***), или при $p_{v+k_2}^* < d_{v+k_2}^*$ все строки произведения матриц $\hat{Q}_{v+k_2}^{**}(y_{v+k_2}^*, x_{v+k_2}, w_{v-1+k_2}^*) \times \hat{Q}_{v+k_2}^{**+}(y_{v+k_2}^*, x_{v+k_2}, w_{v-1+k_2}^*)$ будут зависеть от компонент вектора x_{v+k_2} , то процедура заканчивается, поскольку вектор x_{v+k_2} образует ненаблюдаемое подпространство.

Замечание 5.4. Если окончательно исходная система приводится к неполной блочно-наблюдаемой форме вида (5.37) с выделением ненаблюдаемого подпространства, то с помощью наблюдателя состояния на скользящих режимах и использования метода эквивалентного управления могут быть последовательно получены оценки компонент векторов $y_{i+1} \in R^{m_{i+1}}$, $i = \overline{1, v-1}$, $m_1 + \dots + m_v < n$ и восстановлены значения следующих вектор-

функций и линейных комбинаций

$$\begin{aligned} \bar{h}_i(y_v^*, x_v, w_{v-1}^*), \hat{h}_i(y_v^*, x_v, w_{v-1}^*) + \hat{Q}_i(y_v^*, x_v, w_{v-1}^*)\eta, \quad i = \overline{1, v-1}; \\ h_v(y_v^*, x_v, w_v^*) + Q_v(y_v^*, x_v, w_{v-1}^*)\eta, \end{aligned} \quad (5.41)$$

где значения координат вектора x_v неизвестны. Если при этом в двух последних выражениях (5.41) существуют строки, независимые от компонент вектора x_v , то появляется непосредственная возможность восстановить соответствующие линейные комбинации вектора возмущений η .

Для дальнейшего изложения за основу принимается полная блочная форма с учетом возмущений (5.35). Заметим, что суть процедуры преобразований к форме (5.35) по-прежнему заключается в многократном дифференцировании вектора выходных переменных в следующем смысле. На каждом i -м шаге ($i = \overline{1, v}$) в каждом i -м блоке с помощью перестановки строк, интегральных преобразований и диффеоморфных замен локальных переменных выделяются дифференциальные уравнения, правые части которых не содержат возмущения и в которых матрица частных производных $\{\partial \tilde{h}_i / \partial x_i\}$ размерности $m_{i+1} \times (n - m_1 - \dots - m_i)$ имеет полный ранг m_{i+1} . На следующем $(i+1)$ -м шаге дифференцируются только m_{i+1} переменных, соответствующих строкам указанной матрицы Якоби.

Логическая последовательность неособых преобразований вектора состояния системы (5.1) к форме (5.35) схематично изображена на рис. 5.1, где $\dim \tilde{y}_i = \dim y_{i+1} = m_{i+1}$, $m_i \geq m_{i+1}$, $i = \overline{1, v}$. Действия, требующие интегральных преобразований, выделены жирным шрифтом. Заметим, что в частных случаях в системе (5.35) любое из уравнений относительно переменных \bar{y}_i, \hat{y}_i , $i = \overline{1, v}$ может отсутствовать. При выполнении на каком-либо i -м шаге условия $\text{rank} Q_i = p_i = 0 \Rightarrow \dim \hat{y}_i = 0$ интегральных преобразований не требуется, т.е. на данном шаге отсутствует пункт (б), если $\text{rank}\{Q_i, \partial h_i / \partial x_i\} = d_i = m_i \Rightarrow \dim \bar{y}_i = 0$, то отсутствует пункт (в).

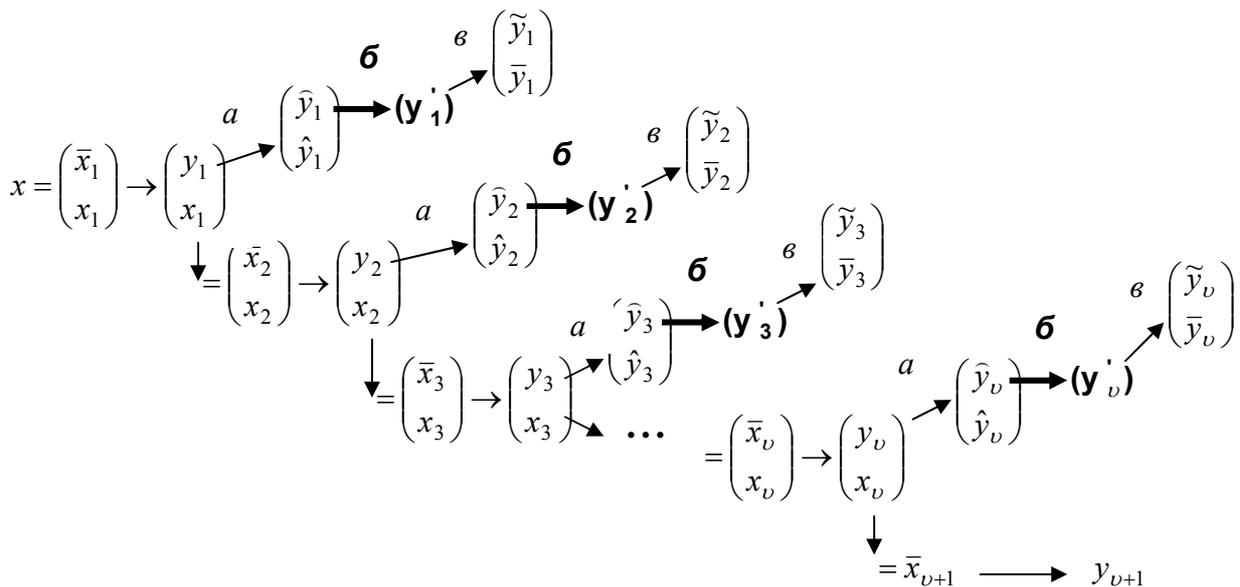


Рис. 5.1. Логическая последовательность преобразований к форме (5.35)

Таким образом, приведенная выше процедура позволяет конструктивно выделить максимальное наблюдаемое и, соответственно, минимальное ненаблюдаемое при измерении y_1 подпространства вектора состояния, а также линейные комбинации вектора возмущений, подлежащих восстановлению с помощью наблюдателя состояния на скользящих режимах. Как и в случае невозмущенной нелинейной системы, обратные преобразования типа (4.15) позволяют локально однозначно восстановить вектор состояния $x = \text{col}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{v+1}) \in R^n$, $x_v = \bar{x}_{v+1}$ исходной системы (5.1) через вычисленные или полученные с помощью наблюдателя оценки вектора состояния $y_{v+1}^* = \text{col}(y_1, \dots, y_{v+1})$, $y_i \leftrightarrow \bar{x}_i$ блочной формы (5.35).

В следующем разделе на основе полученной блочной формы (5.35) разработана каскадная процедура синтеза наблюдателя состояния на скользящих режимах.

5.3. Каскадный синтез наблюдателя на скользящих режимах

Синтез наблюдателя состояния на скользящих режимах для нелинейной системы (5.1) с внешними возмущениями (5.2), приведенной к блочно-наблюдаемому виду (5.35), по принципу организации не отличается от алгоритмов, рассмотренных в предыдущих главах для различного типа систем. Применение метода эквивалентного управления позволяет восстановить значения ограниченных функций. Реализация данного метода на практике заключается во введении в контур наблюдателя состояния фильтров первого порядка с малыми постоянными времени. Число фильтров соответствует числу координат вектора состояния, подлежащих оцениванию. Можно считать, что задача наблюдения в такой системе решается за теоретически конечное время, если пренебрегать динамикой фильтрующих устройств. Как будет показано в данном разделе, при установке дополнительных фильтров появляется возможность получить также оценки линейных комбинаций $\hat{Q}_i(y_{v+1}^*, w_v^*)\eta$, $i = \overline{1, v}$; $Q_{v+1}(y_{v+1}^*, w_v^*)\eta$ при условии, что параметры вектор-функций $\hat{h}_i(y_{v+1}^*, w_v^*)$, $i = \overline{1, v}$; $h_{v+1}(y_{v+1}^*, w_{v+1}^*)$ известны.

Для системы (5.1), преобразованной к виду (5.35), построим наблюдатель состояния блочной структуры вида

$$\dot{\hat{z}}_i = z_{i+1} + \tilde{v}_i, \quad \dot{\hat{z}}_i = \bar{h}_i(z, w_v^*) + \bar{v}_i, \quad \dot{\hat{z}}_i = \hat{h}_i(z, w_v^*) + \hat{v}_i, \quad i = \overline{1, v}; \quad \dot{z}_{v+1} = h_{v+1}(z, w_{v+1}^*) + v_{v+1}, \quad (5.42)$$

где $z = \text{col}(z_1, z_2, \dots, z_{v+1})$, $z_i = \text{col}(\tilde{z}_i, \bar{z}_i, \hat{z}_i)$ – вектор состояния, $v_i = \text{col}(\tilde{v}_i, \bar{v}_i, \hat{v}_i)$, $i = \overline{1, v}$, v_{v+1} – корректирующие воздействия наблюдателя, размерности которых в каждом подблоке каждого блока системы (5.42) совпадают с размерностями соответствующих векторов состояния $\dim y_i = \dim z_i = \dim v_i = m_i$, что является предпосылкой независимого решения элементарных задач синтеза, размерность которых равна $\dim \tilde{v}_i$, $\dim \bar{v}_i$, $\dim \hat{v}_i$, $i = \overline{1, v}$; $\dim v_{v+1}$.

Ниже разработана каскадная процедура выбора разрывных корректирующих воздействий наблюдателя с целью последовательной стабилизации невязок $\varepsilon_i = y_i - z_i$, $\varepsilon_i \in R^{m_i}$, $i = \overline{1, v+1}$, поведение которых согласно (5.35), (5.42) описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\varepsilon}}_i &= \varepsilon_{i+1} - \tilde{v}_i, \quad \dot{\bar{\varepsilon}}_i = \bar{h}_i(z + \varepsilon, w_v^*) - \bar{h}_i(z, w_v^*) - \bar{v}_i, \\
\dot{\hat{\varepsilon}}_i &= \hat{h}_i(z + \varepsilon, w_v^*) - \hat{h}_i(z, w_v^*) + \hat{Q}_i(z + \varepsilon, w_v^*)\eta - \hat{v}_i, \quad i = \overline{1, \nu}; \\
\dot{\varepsilon}_{\nu+1} &= h_{\nu+1}(z + \varepsilon, w_{\nu+1}^*) - h_{\nu+1}(z, w_{\nu+1}^*) + Q_{\nu+1}(z + \varepsilon, w_{\nu+1}^*)\eta - v_{\nu+1},
\end{aligned} \tag{5.43}$$

где $\varepsilon = \text{col}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{\nu+1})$, $\varepsilon_i = \text{col}(\tilde{\varepsilon}_i, \bar{\varepsilon}_i, \hat{\varepsilon}_i)$, $i = \overline{1, \nu}$. Предполагается, что для открытой ограниченной области изменения переменных $\|\varepsilon\| < F = \text{const}$ с учетом (5.2) в системе (5.43) имеют место следующие ограничения:

$$\begin{aligned}
\|\varepsilon_i\| &< F_i = \text{const}, \quad i = \overline{1, \nu+1}; \quad \|\Delta\bar{h}_i\| = \|\bar{h}_i(z + \varepsilon, w_v^*) - \bar{h}_i(z, w_v^*)\| < \bar{F}_i = \text{const}, \\
\|\Delta\hat{h}_i + \hat{Q}_i\eta\| &= \|\hat{h}_i(z + \varepsilon, w_v^*) - \hat{h}_i(z, w_v^*) + \hat{Q}_i(z + \varepsilon, w_v^*)\eta\| < \hat{F}_i = \text{const}, \quad i = \overline{1, \nu}; \\
\|\Delta h_{\nu+1} + Q_{\nu+1}\eta\| &= \|h_{\nu+1}(z + \varepsilon, w_{\nu+1}^*) - h_{\nu+1}(z, w_{\nu+1}^*) + Q_{\nu+1}(z + \varepsilon, w_{\nu+1}^*)\eta\| < \hat{F}_{\nu+1} = \text{const}.
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Задача синтеза сводится к независимому определению нижних оценок для выбора амплитуд разрывных корректирующих воздействий в каждом блоке наблюдателя (5.42), при которых обеспечивается последовательная стабилизация переменных $\varepsilon_i = 0$ системы (5.43).

Процедура синтеза.

Шаг 1. (а) В первом подблоке первого блока системы (5.43) решается задача стабилизации переменной $\tilde{\varepsilon}_1$ при формировании из измеряемых переменных разрывной коррекции $\tilde{v}_1 = \tilde{M}_1 \text{sign} \tilde{\varepsilon}_1$, $\text{sign}(\tilde{\varepsilon}_1) = \text{col}[\text{sign}(\tilde{\varepsilon}_{1_1}), \dots, \text{sign}(\tilde{\varepsilon}_{1_{m_2}})]$. Выбор амплитуды из условия $\tilde{\varepsilon}_1^T \dot{\tilde{\varepsilon}}_1 < 0 \Rightarrow \tilde{M}_1 > F_2$ обеспечивает в замкнутой системе $\dot{\tilde{\varepsilon}}_1 = \varepsilon_2 - \tilde{M}_1 \text{sign} \tilde{\varepsilon}_1$ возникновение скользящего режима вдоль многообразия $\tilde{S}_1 = \{\tilde{\varepsilon}_1 = 0\}$ и, следовательно, обеспечивается равенство $\tilde{z}_1 = \tilde{y}_1$. Согласно методу эквивалентного управления из равенства $\dot{\tilde{\varepsilon}}_1 = \varepsilon_2 - \tilde{v}_{1\text{eq}} = 0$ получаем оценку переменной состояния второго блока системы (5.43)

$$\varepsilon_2 = \tilde{v}_{1\text{eq}}. \tag{5.45}$$

Для непосредственного получения эквивалентных значений разрывных корректирующих воздействий, как и раньше, используются линейные фильтры с малой постоянной времени (2.29), (2.31).

(б) Во втором подблоке первого блока системы (5.43) решается задача стабилизации переменной $\bar{\varepsilon}_1$ посредством формирования из измеряемых переменных разрывного управления $\bar{v}_1 = \bar{M}_1 \text{sign} \bar{\varepsilon}_1$, $\text{sign}(\bar{\varepsilon}_1) = \text{col}[\text{sign}(\bar{\varepsilon}_{1_1}), \dots, \text{sign}(\bar{\varepsilon}_{1_{(m_1-d_1)}})]$. Выбор амплитуды $\bar{\varepsilon}_1^T \dot{\bar{\varepsilon}}_1 < 0 \Rightarrow \bar{M}_1 > \bar{F}_1$ приводит к возникновению в замкнутой системе $\dot{\bar{\varepsilon}}_1 = \Delta\bar{h}_1 - \bar{M}_1 \text{sign} \bar{\varepsilon}_1$ скользящего режима вдоль многообразия $\bar{S}_1 = \{\bar{\varepsilon}_1 = 0\}$, $\bar{\varepsilon}_1 = 0 \Rightarrow \bar{z}_1 = \bar{y}_1$.

(в) В третьем подблоке первого блока решается задача стабилизации переменной $\hat{\varepsilon}_1$ посредством формирования из измеряемых переменных разрывного управления $\hat{v}_1 = \hat{M}_1 \text{sign} \hat{\varepsilon}_1$, $\text{sign}(\hat{\varepsilon}_1) = \text{col}[\text{sign}(\hat{\varepsilon}_{1_1}), \dots, \text{sign}(\hat{\varepsilon}_{1_{p_1}})]$. Выбор амплитуды $\hat{\varepsilon}_1^T \dot{\hat{\varepsilon}}_1 < 0 \Rightarrow \hat{M}_1 > \hat{F}_1$ приводит к возникновению в замкнутой системе $\dot{\hat{\varepsilon}}_1 = \Delta\hat{h}_1 + \hat{Q}_1\eta - \hat{M}_1 \text{sign} \hat{\varepsilon}_1$ скользящего режима вдоль многообразия $\hat{S}_1 = \{\hat{\varepsilon}_1 = 0\}$, $\hat{\varepsilon}_1 = 0 \Rightarrow \hat{z}_1 = \hat{y}_1$. Согласно методу эквивалентного управления из ра-

венства $\dot{\hat{\varepsilon}}_1 = 0$ получаем

$$\Delta\hat{h}_1 + \hat{Q}_1\eta = \hat{v}_{1\text{eq}}. \quad (5.46)$$

Реализации соотношения (5.46) потребует дополнительной установки фильтрующих устройств. Описанная процедура аналогичным образом продолжается далее, причем управляющие воздействия в следующем блоке формируются из «своих» переменных, восстановленных в первом подблоке (а) на предыдущем шаге, например, для второго блока используется выражение (5.45), и т.д.

Шаг i ($i = 2, \nu$). (а) В первом подблоке i -го блока системы (5.43) решается задача стабилизации переменной $\tilde{\varepsilon}_i$ при формировании из эквивалентного управления первого подблока предыдущего блока разрывной коррекции $\tilde{v}_i = \tilde{M}_i \tilde{E}_i \text{sign} \tilde{v}_{(i-1)\text{eq}}$, $\text{sign}(\tilde{v}_{(i-1)\text{eq}}) = \text{col}[\text{sign}(\tilde{v}_{(i-1)\text{eq}_1}), \dots, \text{sign}(\tilde{v}_{(i-1)\text{eq}_{m_i}})]$ с амплитудой $\tilde{\varepsilon}_i^T \tilde{\varepsilon}_i < 0 \Rightarrow \tilde{M}_i > F_{i+1}$, где матрица \tilde{E}_i размерности $m_{i+1} \times m_i$ имеет следующую структуру: $\tilde{E}_i = (I_{m_{i+1}} \ 0)$. В замкнутой системе $\dot{\tilde{\varepsilon}}_i = \varepsilon_{i+1} - \tilde{M}_i \text{sign} \tilde{\varepsilon}_i$ возникает скользящий режим вдоль многообразия $\tilde{S}_i = \{\tilde{\varepsilon}_i = 0 \cap \tilde{S}_{i-1}\}$, $\tilde{\varepsilon}_i = 0 \Rightarrow \tilde{z}_i = \tilde{y}_i$. Из равенства $\dot{\tilde{\varepsilon}}_i = \varepsilon_{i+1} - \tilde{v}_{i\text{eq}} = 0$ получаем оценку переменной состояния следующего ($i+1$)-го блока системы (5.43) $\varepsilon_{i+1} = \tilde{v}_{i\text{eq}}$.

(б) Во втором подблоке i -го блока системы (5.43) решается задача стабилизации переменной $\bar{\varepsilon}_i$ посредством формирования разрывной коррекции $\bar{v}_i = \bar{M}_i \bar{E}_i \text{sign} \bar{v}_{(i-1)\text{eq}}$ с амплитудой $\bar{M}_i > \bar{F}_i$, где матрица \bar{E}_i размерности $(m_i - m_{i+1} - p_i) \times m_i$ имеет следующую структуру: $\bar{E}_i = (0 \ I_{m_i - m_{i+1} - p_i} \ 0)$. В замкнутой системе $\dot{\bar{\varepsilon}}_i = \Delta\bar{h}_i - \bar{M}_i \text{sign} \bar{\varepsilon}_i$ возникает скользящий режим вдоль многообразия $\bar{S}_i = \{\bar{\varepsilon}_i = 0 \cap \bar{S}_{i-1}\}$, $\bar{\varepsilon}_i = 0 \Rightarrow \bar{z}_i = \bar{y}_i$.

(в) В третьем подблоке i -го блока решается задача стабилизации переменной $\hat{\varepsilon}_i$ посредством формирования разрывного управления $\hat{v}_i = \hat{M}_i \hat{E}_i \text{sign} \hat{v}_{(i-1)\text{eq}}$ с амплитудой $\hat{M}_i > \hat{F}_i$, где матрица \hat{E}_i размерности $p_i \times m_i$ имеет следующую структуру: $\hat{E}_i = (0 \ I_{p_i})$. В замкнутой системе $\dot{\hat{\varepsilon}}_i = \Delta\hat{h}_i + \hat{Q}_i\eta - \hat{M}_i \text{sign} \hat{\varepsilon}_i$ возникает скользящий режим вдоль многообразия $\hat{S}_i = \{\hat{\varepsilon}_i = 0 \cap \hat{S}_{i-1}\}$, $\hat{\varepsilon}_i = 0 \Rightarrow \hat{z}_i = \hat{y}_i$. Согласно методу эквивалентного управления из равенства $\dot{\hat{\varepsilon}}_i = 0$ получаем

$$\Delta\hat{h}_i + \hat{Q}_i\eta = \hat{v}_{i\text{eq}}. \quad (5.47)$$

Шаг $\nu+1$. На последнем шаге решается задача стабилизации переменной последнего блока $\varepsilon_{\nu+1}$ посредством формирования разрывного управления $v_{\nu+1} = M_{\nu+1} \text{sign} \tilde{v}_{\nu\text{eq}}$ с амплитудой $M_{\nu+1} > \hat{F}_{\nu+1}$, что приводит к возникновению в замкнутой системе $\dot{\varepsilon}_{\nu+1} = \Delta h_{\nu+1} + Q_{\nu+1}\eta - M_{\nu+1} \text{sign} \varepsilon_{\nu+1}$ скользящего режима вдоль многообразия $S_{\nu+1} = \{\varepsilon_{\nu+1} = 0 \cap \tilde{S}_{\nu}\}$, $\varepsilon_{\nu+1} = 0 \Rightarrow z_{\nu+1} = y_{\nu+1}$. Согласно методу эквивалентного управления из равенства $\dot{\varepsilon}_{\nu+1} = 0$ получаем

$$\Delta h_{\nu+1} + Q_{\nu+1}\eta = v_{(\nu+1)\text{eq}}. \quad (5.48)$$

где дифференциальные уравнения относительно переменных \bar{z}_1, \hat{z}_1 отсутствуют и сигналы \bar{y}_1, \hat{y}_1 подаются во вторые и третьи подблоки наблюдателя (5.49) непосредственно с объекта управления. Дифференциальные уравнения относительно невязок $\varepsilon_i = y_i - z_i$ с учетом (5.35), (5.49) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\varepsilon}}_i &= \varepsilon_{i+1} - \tilde{v}_i, \quad i = \overline{1, \nu}; \quad \dot{\tilde{\varepsilon}}_i = \bar{h}_i(\bar{y}_1, \hat{y}_1, z + \varepsilon, w_\nu^*) - \bar{h}_i(\bar{y}_1, \hat{y}_1, z, w_\nu^*), \\ \dot{\hat{\varepsilon}}_i &= \hat{h}_i(\bar{y}_1, \hat{y}_1, z + \varepsilon, w_\nu^*) - \hat{h}_i(\bar{y}_1, \hat{y}_1, z, w_\nu^*) + \hat{Q}_i(\bar{y}_1, \hat{y}_1, z + \varepsilon, w_\nu^*)\eta, \quad i = \overline{2, \nu}; \\ \dot{\varepsilon}_{\nu+1} &= h_{\nu+1}(\bar{y}_1, \hat{y}_1, z + \varepsilon, w_{\nu+1}^*) - h_{\nu+1}(\bar{y}_1, \hat{y}_1, z, w_{\nu+1}^*) + Q_{\nu+1}(\bar{y}_1, \hat{y}_1, z + \varepsilon, w_\nu^*)\eta. \end{aligned} \quad (5.50)$$

В системе (5.50) задача стабилизации переменных $\bar{\varepsilon}_i, \hat{\varepsilon}_i, i = \overline{2, \nu}; \varepsilon_{\nu+1}$ не ставится, а для оценки векторов $\bar{y}_i, \hat{y}_i, i = \overline{2, \nu}; y_{\nu+1}$ могут быть использованы непосредственно величины эквивалентных управлений $v_{ieq} = \varepsilon_{i+1} \Rightarrow \bar{y}_{i+1} = \bar{z}_{i+1} + \bar{E}_{i+1}v_{ieq}, \hat{y}_{i+1} = \hat{z}_{i+1} + \hat{E}_{i+1}v_{ieq}, i = \overline{1, \nu-1}; y_{\nu+1} = z_{\nu+1} + v_{ieq}$.

Замечание 5.6. Если в системе (5.35) отсутствует точная информация о функциях $\bar{h}_i(\cdot), \hat{h}_i(\cdot), i = \overline{1, \nu}; h_{\nu+1}(\cdot)$, то наблюдатель состояния строится в виде

$$\dot{\tilde{z}}_i = z_{i+1} + \tilde{v}_i, \quad \dot{\tilde{z}}_i = \bar{v}_i, \quad \dot{\hat{z}}_i = \hat{v}_i, \quad i = \overline{1, \nu}; \quad \dot{z}_{\nu+1} = v_{\nu+1}. \quad (5.51)$$

С учетом (5.35), (5.51) дифференциальные уравнения относительно невязок принимают вид:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\varepsilon}}_i &= \varepsilon_{i+1} - \tilde{v}_i, \quad \dot{\tilde{\varepsilon}}_i = \bar{h}_i(z + \varepsilon, w_\nu^*) - \bar{v}_i, \\ \dot{\hat{\varepsilon}}_i &= \hat{h}_i(z + \varepsilon, w_\nu^*) + \hat{Q}_i(z + \varepsilon, w_\nu^*)\eta - \hat{v}_i, \quad i = \overline{1, \nu}; \\ \dot{\varepsilon}_{\nu+1} &= h_{\nu+1}(z + \varepsilon, w_{\nu+1}^*) + Q_{\nu+1}(z + \varepsilon, w_\nu^*)\eta - v_{\nu+1}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Аналогично синтезируя разрывную коррекцию, в системе (5.52) в соответствии с методом эквивалентного управления получим: если $\bar{M}_i > \|\bar{h}_i(z + \varepsilon, w_\nu^*)\|$, то $\bar{v}_{ieq} = \bar{h}_i(z + \varepsilon, w_\nu^*)$; если $\hat{M}_i > \|\hat{h}_i(z + \varepsilon, w_\nu^*) + \hat{Q}_i(z + \varepsilon, w_\nu^*)\eta\|$, то $\hat{v}_{ieq} = \hat{h}_i(z + \varepsilon, w_\nu^*) + \hat{Q}_i(z + \varepsilon, w_\nu^*)\eta, i = \overline{1, \nu}$; если $M_{\nu+1} > \|h_{\nu+1}(z + \varepsilon, w_{\nu+1}^*) + Q_{\nu+1}(z + \varepsilon, w_\nu^*)\eta\|$, то $v_{\nu+1} = h_{\nu+1}(z + \varepsilon, w_{\nu+1}^*) + Q_{\nu+1}(z + \varepsilon, w_\nu^*)\eta$, откуда, после стабилизации всех переменных $\varepsilon = 0$ системы (5.52) и установки соответствующих фильтрующих элементов, можно получить смешанные оценки $\bar{v}_{ieq} = \bar{h}_i(z, w_\nu^*), \hat{v}_{ieq} = \hat{h}_i(z, w_\nu^*) + \hat{Q}_i(z, w_\nu^*)\eta, i = \overline{1, \nu}; v_{\nu+1} = h_{\nu+1}(z, w_{\nu+1}^*) + Q_{\nu+1}(z, w_\nu^*)\eta$.

5.4. Каскадный синтез наблюдателя состояния с непрерывными корректирующими воздействиями

Если для системы (5.35) задача оценивания внешних возмущений не ставится, то задача наблюдения вектора состояния может быть решена с помощью наблюдателя состояния с непрерывной коррекцией. В этом случае из-за действия неконтролируемых, ограниченных по модулю возмущений задача решается с заданной точностью. Декомпозиция задачи синтеза на независимо решаемые подзадачи меньшей размерности обусловливается приведением ли-

нейной части системы (5.35) (первые подблоки) к верхнему треугольному виду. Процедура синтеза сводится к нахождению нижних оценок (неравенств) для иерархического выбора коэффициентов в подблоках наблюдателя. Методика, разработанная в разделе 4.4 для возмущенных нелинейных систем, в данном разделе распространяется на возмущенные нелинейные системы (5.1), приводимые к виду (5.35). Суть процедуры преобразований заключается во вводе новых переменных $s = \text{col}(s_1, \dots, s_{\nu+1})$, $\dim s_i = \dim y_i$, $i = \overline{1, \nu+1}$ и неособой замене локальных координат вида:

$$s_1 = y_1; \quad s_2 = -L_2^* y_1 + y_2; \quad s_i = \sum_{j=1}^{i-2} W_{ij}^* y_j - L_i^* y_{i-1} + y_i, \quad i = \overline{3, \nu+1}, \quad (5.53)$$

где $W_{ij}^* \in R^{m_i \times m_j}$, $W_{ij}^* = (W_{ij} \ 0)$, $W_{ij} \in R^{m_i \times m_{j+1}}$, $L_i^* \in R^{m_i \times m_{i-1}}$, $L_i^* = (L_i \ 0)$, $L_i \in R^{m_i \times m_i}$ – матрицы с постоянными элементами, которые будут выбраны позже при синтезе наблюдателя состояния. Полагая в системе (5.53) $W_{\nu+1, \nu-1} = L_{\nu+1} L_{\nu+1}^*$; $W_{\nu+1, j-1} = -L_{\nu+1} W_{\nu+1, j}^*$, $j = \overline{\nu-1, 2}$; $W_{i, i-2} = L_i L_i^* + E_{i1} W_{i+1, i-1}^* - E_{i1} L_{i+1}^* L_i^*$, $W_{i, j-1} = -L_i W_{ij}^* E_{i1} W_{i+1, j}^* + E_{i1} L_{i+1}^* W_{ij}^*$, $j = \overline{i-2, 2}$, $i = \overline{\nu, 3}$,

$$\text{где } E_{i1} = \begin{pmatrix} I_{m_{i+1}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_{i2} = \begin{pmatrix} 0_{m_{i+1}} \\ I_{m_i - m_{i+1} - p_i} \\ 0_{p_i} \end{pmatrix}, \quad E_{i2} = \begin{pmatrix} 0 \\ I_{p_i} \end{pmatrix}, \quad E_{i1} \in R^{m_i \times m_{i+1}}, \quad E_{i2} \in R^{m_i \times (m_i - m_{i+1} - p_i)},$$

$E_{i3} \in R^{m_i \times p_i}$, запишем дифференциальные уравнения относительно новых переменных (5.53):

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= E_{11} L_2^* s_1 + E_{11} s_2 + E_{12} \bar{h}_1(s, w_v^*) + E_{13} [\hat{h}_1(s, w_v^*) + \hat{Q}_1(s, w_v^*) \eta]; \\ \dot{s}_2 &= (-L_2 L_2^* - E_{21} W_{31}^* + E_{21} L_3^* L_2^*) s_1 + (E_{21} L_3^* - L_2) s_2 + E_{21} s_3 + \\ &\quad + E_{22} \bar{h}_2(s, w_v^*) + E_{23} [\hat{h}_2(s, w_v^*) + \hat{Q}_2(s, w_v^*) \eta]; \\ \dot{s}_i &= (L_i W_{i1}^* - E_{i1} W_{i+1, 1}^* - E_{i1} L_{i+1}^* W_{i1}^*) s_1 + (E_{i1} L_{i+1}^* - L_i) s_i + E_{i1} s_{i+1} + \\ &\quad + E_{i2} \bar{h}_i(s, w_v^*) + E_{i3} [\hat{h}_i(s, w_v^*) + \hat{Q}_i(s, w_v^*) \eta], \quad i = \overline{3, \nu}; \\ \dot{s}_{\nu+1} &= L_{\nu+1} W_{\nu+1, 1}^* s_1 - L_{\nu+1} s_{\nu+1} + h_{\nu+1}(s, w_{\nu+1}^*) + Q_{\nu+1}(s, w_{\nu+1}^*) \eta. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Для системы (5.35), преобразованной к виду (5.54), строится наблюдатель состояния вида

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= E_{11} L_2^* z_1 + E_{11} z_2 + E_{12} \bar{h}_1(z, w_v^*) + E_{13} \hat{h}_1(z, w_v^*) + v_1; \\ \dot{z}_2 &= (-L_2 L_2^* - E_{21} W_{31}^* + E_{21} L_3^* L_2^*) z_1 + (E_{21} L_3^* - L_2) z_2 + E_{21} z_3 + E_{22} \bar{h}_2(z, w_v^*) + E_{23} \hat{h}_2(z, w_v^*) + v_2; \\ \dot{z}_i &= (L_i W_{i1}^* - E_{i1} W_{i+1, 1}^* - E_{i1} L_{i+1}^* W_{i1}^*) z_1 + (E_{i1} L_{i+1}^* - L_i) z_i + E_{i1} z_{i+1} + \\ &\quad + E_{i2} \bar{h}_i(z, w_v^*) + E_{i3} \hat{h}_i(z, w_v^*) + v_i, \quad i = \overline{3, \nu}; \\ \dot{z}_{\nu+1} &= L_{\nu+1} W_{\nu+1, 1}^* z_1 - L_{\nu+1} z_{\nu+1} + h_{\nu+1}(z, w_{\nu+1}^*) + v_{\nu+1}, \end{aligned} \quad (5.55)$$

где $z = \text{col}(z_1, \dots, z_{\nu+1})$ – вектор состояния, $\dim z_i = \dim s_i = m_i$, v_i , $i = \overline{1, \nu+1}$ – корректирующие воздействия наблюдателя, которые выберем линейными:

$$\begin{aligned} v_1 &= L_1 (s_1 - z_1); \quad v_2 = (-L_2 L_2^* - E_{21} W_{31}^* + E_{21} L_3^* L_2^*) (s_1 - z_1); \\ v_i &= (L_i W_{i1}^* - E_{i1} W_{i+1, 1}^* - E_{i1} L_{i+1}^* W_{i1}^*) (s_1 - z_1), \quad i = \overline{3, \nu}; \quad v_{\nu+1} = L_{\nu+1} W_{\nu+1, 1}^* (s_1 - z_1), \end{aligned} \quad (5.56)$$

где $L_1 \in R^{m_1 \times m_1}$ – диагональная матрица с постоянными коэффициентами.

С учетом выражений (5.54)–(5.56), запишем систему дифференциальных уравнений относительно невязок $\varepsilon_i = s_i - z_i$:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_i &= (E_{i1}L_{i+1}^* - L_i)\varepsilon_i + E_{i1}\varepsilon_{i+1} + E_{i2}[\bar{h}_i(z + \varepsilon, w_v^*) - \bar{h}_i(z, w_v^*)] + \\ &\quad + E_{i3}[\hat{h}_i(z + \varepsilon, w_v^*) - \hat{h}_i(z, w_v^*) + \hat{Q}_i(z + \varepsilon, w_v^*)\eta], \quad i = \overline{1, \nu}; \\ \dot{\varepsilon}_{\nu+1} &= -L_{\nu+1}\varepsilon_{\nu+1} + h_{\nu+1}(z + \varepsilon, w_{\nu+1}^*) - h_{\nu+1}(z, w_{\nu+1}^*) + Q_{\nu+1}(z + \varepsilon, w_{\nu+1}^*)\eta. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Теорема 5.2. Пусть в некоторой открытой ограниченной области $\|\varepsilon^*\| < F$ выполняются условия вида (5.44), в которых переменные $z_i, \varepsilon_i, i = \overline{1, \nu+1}$ удовлетворяют системам (5.55)–(5.57). Тогда существуют конечные значения коэффициентов матриц $L_i, i = \overline{1, \nu+1}$, при которых задача оценивания переменных s решается посредством наблюдателя (5.55)–(5.56) с заданной точностью или в терминах системы (5.57) обеспечиваются соотношения

$$\|\varepsilon_i\| < \Delta_i, \quad i = \overline{1, \nu+1}. \quad (5.58)$$

В данной теореме сформулированы достаточные условия, доказательства которых следуют из приводимой ниже пошаговой процедуры синтеза непрерывных корректирующих воздействий наблюдателя (5.56) с конечными коэффициентами. В процедуре использован второй метод Ляпунова для исследования достаточных условий устойчивости и каскадный принцип анализа соответствующих квадратичных форм. Теорема считается доказанной, если для системы (5.57) будут найдены нижние оценки для иерархического выбора конечных коэффициентов матриц $L_i, i = \overline{1, \nu+1}$, при которых обеспечиваются неравенства (5.58).

Доказательство теоремы 5.2. В соответствии с представлением исходной системы в виде (5.35), положим в системе (5.57)

$$\varepsilon_i = \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_i \\ \bar{\varepsilon}_i \\ \hat{\varepsilon}_i \end{pmatrix}, \quad L_i = \begin{pmatrix} \tilde{L}_i & 0 \\ & \bar{L}_i \\ 0 & \hat{L}_i \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, \nu}, \quad (5.59)$$

где $\tilde{\varepsilon}_i \in R^{m_{i+1}}$, $\bar{\varepsilon}_i \in R^{m_i - m_{i+1} - p_i}$, $\hat{\varepsilon}_i \in R^{p_i}$, матрицы $\tilde{L}_i \in R^{m_{i+1} \times m_{i+1}}$, $\bar{L}_i \in R^{(m_i - m_{i+1} - p_i) \times (m_i - m_{i+1} - p_i)}$, $\hat{L}_i \in R^{p_i \times p_i}$ – диагональные. Проведем дополнительное разбиение вектора состояния системы (5.59)

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_i &= \text{col}(\tilde{\varepsilon}_{i,\nu+1}, \tilde{\varepsilon}_{i\nu}, \dots, \tilde{\varepsilon}_{i,i+1}), \quad \tilde{\varepsilon}_{i,\nu+1} \in R^{m_{\nu+1}}, \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} \in R^{m_j - m_{j+1}}, \quad j = \overline{\nu, i+1}, \\ \tilde{\varepsilon}_{i,i+1} &= \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_{i,i+1} \\ \tilde{\varepsilon}_{i,i+1} \\ \tilde{\varepsilon}_{i,i+1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\varepsilon}_{i,i+1} \in R^{m_{i+1} - m_{i+2} - p_{i+1}}, \quad \tilde{\varepsilon}_{i,i+1} \in R^{p_{i+1}}, \quad i = \overline{1, \nu-1}. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Проиллюстрируем разбиение (5.60) с помощью условной диаграммы, представленной на рис. 5.3, на примере системы, расщепленной на 4 блока ($\nu + 1 = 4$). Группировка компонент векторов $\tilde{\varepsilon}_i$ (5.60), как видно на рис. 5.3, раскрывает связи между переменными подблоков различных блоков системы (5.57), которые следуют из структуры наблюдаемости исходной системы (5.1) с учетом возмущений.

	$\dim \tilde{\varepsilon}_1 = m_2$	$\dim \tilde{\varepsilon}_2 = m_3$	
$\dim \tilde{\varepsilon}_{14} = \dim \varepsilon_4$	$\dim \tilde{\varepsilon}_{24} = \dim \varepsilon_4$	$\dim \tilde{\varepsilon}_3 = m_4$	$\dim \varepsilon_4 = m_4$
$\dim \tilde{\varepsilon}_{13} =$ $= \dim \bar{\varepsilon}_3 + \dim \hat{\varepsilon}_3$	$\dim \tilde{\varepsilon}_{23} = \dim \bar{\varepsilon}_3$ $\dim \tilde{\varepsilon}_{23} = \dim \hat{\varepsilon}_3$	$\dim \bar{\varepsilon}_3 = m_3 - m_4 - p_3$ $\dim \hat{\varepsilon}_3 = p_3$	
$\dim \tilde{\varepsilon}_{12} = \dim \bar{\varepsilon}_2$	$\dim \bar{\varepsilon}_2 = m_2 - m_3 - p_2$		
$\dim \tilde{\varepsilon}_{12} = \dim \hat{\varepsilon}_2$	$\dim \hat{\varepsilon}_2 = p_2$		
$\dim \bar{\varepsilon}_1 = m_1 - m_2 - p_1$			
$\dim \hat{\varepsilon}_1 = p_1$			

Рис. 5.3. Структура наблюдаемости с учетом возмущений

Для простоты изложения положим диагональные элементы матриц \bar{L}_i , \hat{L}_i ($i = \overline{1, \nu}$), \tilde{L}_ν и $L_{\nu+1}$ равными между собой и равными $\bar{l}_i = \text{const} > 0$, $\hat{l}_i = \text{const} > 0$, $\tilde{l}_\nu = \text{const} > 0$, $l_{\nu+1} = \text{const} > 0$ соответственно. Предположим также, что диагональные элементы $\tilde{l}_{ik} = \text{const} > 0$, $k = \overline{1, m_{i+1}}$ матриц \tilde{L}_i , $i = \overline{1, \nu-1}$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \tilde{l}_{i1} = \tilde{l}_{i2} = \dots = \tilde{l}_{i, m_{\nu+1}} = \tilde{l}_i^{\nu+1}, \quad \tilde{l}_{i, (m_{j+1}+1)} = \dots = \tilde{l}_{i, m_j} = \tilde{l}_i^j, \quad j = \overline{\nu, i+2}, \\ \tilde{l}_{i, (m_{i+2}+1)} = \dots = \tilde{l}_{i, (m_{i+1}-p_{i+1})} = \tilde{l}_i^{i+1}, \quad \tilde{l}_{i, (m_{i+1}-p_{i+1}+1)} = \dots = \tilde{l}_{i, m_{i+1}} = \tilde{l}_i^{i+1}, \quad i = \overline{1, \nu-1}. \end{aligned} \quad (5.61)$$

С учетом обозначений (5.59)–(5.61), систему (5.57) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} &= (\tilde{l}_{i+1}^j - \tilde{l}_i^j) \tilde{\varepsilon}_{ij} + \tilde{\varepsilon}_{i+1, j}, \quad j = \overline{\nu+1, i+2}, \quad \dot{\tilde{\varepsilon}}_{i, i+1} = (\bar{l}_{i+1} - \tilde{l}_i^{i+1}) \tilde{\varepsilon}_{i, i+1} + \bar{\varepsilon}_{i+1}, \\ \dot{\tilde{\varepsilon}}_{i, i+1} &= (\hat{l}_{i+1} - \tilde{l}_i^{i+1}) \tilde{\varepsilon}_{i, i+1} + \hat{\varepsilon}_{i+1}, \quad i = \overline{1, \nu-1}; \quad \dot{\tilde{\varepsilon}}_\nu = (l_{\nu+1} - \tilde{l}_\nu) \tilde{\varepsilon}_\nu + \varepsilon_{\nu+1}; \\ \dot{\bar{\varepsilon}}_i &= -\bar{l}_i \bar{\varepsilon}_i + \Delta \bar{h}_i, \quad \dot{\hat{\varepsilon}}_i = -\hat{l}_i \hat{\varepsilon}_i + \Delta \hat{h}_i + \hat{Q}_i \eta, \quad i = \overline{1, \nu}; \quad \dot{\varepsilon}_{\nu+1} = -l_{\nu+1} \varepsilon_{\nu+1} + \Delta h_{\nu+1} + Q_{\nu+1} \eta. \end{aligned} \quad (5.62)$$

В соответствии с расщеплениями (5.59)–(5.60) можно детализировать условие (5.58), введя заданную точность оценивания покомпонентно:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\varepsilon}_{ij}\| < \tilde{\Delta}_{ij}, \quad j = \overline{\nu+1, i+2}, \quad \|\tilde{\varepsilon}_{i, i+1}\| < \tilde{\Delta}_{i, i+1}, \quad \|\tilde{\varepsilon}_{i, i+1}\| < \tilde{\Delta}_{i, i+1}, \quad i = \overline{1, \nu-1}; \\ \|\bar{\varepsilon}_i\| < \bar{\Delta}_i, \quad \|\hat{\varepsilon}_i\| < \hat{\Delta}_i, \quad i = \overline{1, \nu}. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Рассмотрим для системы (5.62) квадратичную форму V в виде суммы квадратичных форм

$$V = \sum_{i=1}^{\nu-1} \left(\sum_{j=\nu+1}^{i+2} \tilde{V}_{ij} + \tilde{V}_{i, i+1} + \tilde{V}_{i, i+1} \right) + \tilde{V}_\nu + \sum_{i=1}^{\nu} (\bar{V}_i + \hat{V}_i) + V_{\nu+1} = \quad (5.64)$$

$$= \sum_{i=1}^{\nu-1} \left(\sum_{j=\nu+1}^{i+2} \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_{ij}^T \tilde{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_{i,i+1}^T \tilde{\varepsilon}_{i,i+1} + \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_{i,i+1}^T \tilde{\varepsilon}_{i,i+1} \right) + \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_\nu^T \tilde{\varepsilon}_\nu + \sum_{i=1}^{\nu} \left(\frac{1}{2} \bar{\varepsilon}_i^T \bar{\varepsilon}_i + \frac{1}{2} \hat{\varepsilon}_i^T \hat{\varepsilon}_i \right) + \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu+1}^T \varepsilon_{\nu+1}.$$

В соответствии с каскадным принципом найдем общую оценку производной квадратичной формы \dot{V} , последовательно оценивая производные каждого слагаемого выражения (5.64):

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{V}}_{ij} &= \tilde{\varepsilon}_{ij}^T ((\tilde{l}_{i+1}^j - \tilde{l}_i^j) \tilde{\varepsilon}_{ij} + \tilde{\varepsilon}_{i+1,j}) \leq (\tilde{l}_{i+1}^j - \tilde{l}_i^j) \|\tilde{\varepsilon}_{ij}\| \|\tilde{\varepsilon}_{ij}\| + \|\tilde{\varepsilon}_{ij}\| \|\tilde{\varepsilon}_{i+1,j}\|, \quad j = \overline{\nu+1}, i+2, \\ \dot{\tilde{V}}_{i,i+1} &= \tilde{\varepsilon}_{i,i+1}^T ((\tilde{l}_{i+1} - \tilde{l}_i^{i+1}) \tilde{\varepsilon}_{i,i+1} + \bar{\varepsilon}_{i+1}) \leq (\tilde{l}_{i+1} - \tilde{l}_i^{i+1}) \|\tilde{\varepsilon}_{i,i+1}\| \|\tilde{\varepsilon}_{i,i+1}\| + \|\tilde{\varepsilon}_{i,i+1}\| \|\bar{\varepsilon}_{i+1}\|, \\ \dot{\tilde{V}}_{i,i+1} &= \tilde{\varepsilon}_{i,i+1}^T ((\hat{l}_{i+1} - \tilde{l}_i^{i+1}) \tilde{\varepsilon}_{i,i+1} + \hat{\varepsilon}_{i+1}) \leq (\hat{l}_{i+1} - \tilde{l}_i^{i+1}) \|\tilde{\varepsilon}_{i,i+1}\| \|\tilde{\varepsilon}_{i,i+1}\| + \|\tilde{\varepsilon}_{i,i+1}\| \|\hat{\varepsilon}_{i+1}\|, \quad i = \overline{1, \nu-1}; \\ \dot{\tilde{V}}_\nu &= \tilde{\varepsilon}_\nu^T ((l_{\nu+1} - \tilde{l}_\nu) \tilde{\varepsilon}_\nu + \varepsilon_{\nu+1}) \leq (l_{\nu+1} - \tilde{l}_\nu) \|\tilde{\varepsilon}_\nu\| \|\tilde{\varepsilon}_\nu\| + \|\tilde{\varepsilon}_\nu\| \|\varepsilon_{\nu+1}\|; \\ \dot{\bar{V}}_i &= \bar{\varepsilon}_i^T (-\bar{l}_i \bar{\varepsilon}_i + \Delta \bar{h}_i) \leq -\bar{l}_i \|\bar{\varepsilon}_i\| \|\bar{\varepsilon}_i\| + \|\bar{\varepsilon}_i\| \|\hat{F}_i\|, \\ \dot{\hat{V}}_i &= \hat{\varepsilon}_i^T (-\hat{l}_i \hat{\varepsilon}_i + \Delta \hat{h}_i + \hat{Q}_i \eta) \leq -\hat{l}_i \|\hat{\varepsilon}_i\| \|\hat{\varepsilon}_i\| + \|\hat{\varepsilon}_i\| \|\hat{F}_i\|, \quad i = \overline{1, \nu}; \\ \dot{V}_{\nu+1} &= \varepsilon_{\nu+1}^T (-l_{\nu+1} \varepsilon_{\nu+1} + \Delta h_{\nu+1}) + Q_{\nu+1} \eta \leq -l_{\nu+1} \|\varepsilon_{\nu+1}\| \|\varepsilon_{\nu+1}\| + \|\varepsilon_{\nu+1}\| \|\hat{F}_{\nu+1}\|. \end{aligned} \quad (5.65)$$

Рассмотрим три последних системы (5.65), которые соответствуют «последним» подблокам блоков системы (5.62). Производные отрицательны $\dot{\bar{V}}_i < 0$, $\dot{\hat{V}}_i < 0$, $i = \overline{1, \nu}$; $\dot{V}_{\nu+1} < 0$ при выполнении условий $\bar{l}_i > \bar{F}_i / \|\bar{\varepsilon}_i\|$, $\hat{l}_i > \hat{F}_i / \|\hat{\varepsilon}_i\|$, $l_{\nu+1} > \hat{F}_{\nu+1} / \|\varepsilon_{\nu+1}\|$, и векторы состояния сходятся в области

$$\|\bar{\varepsilon}_i\| \leq \frac{\bar{F}_i}{\bar{l}_i} < \bar{\Delta}_i, \quad \|\hat{\varepsilon}_i\| \leq \frac{\hat{F}_i}{\hat{l}_i} < \hat{\Delta}_i, \quad \|\varepsilon_{\nu+1}\| \leq \frac{\hat{F}_{\nu+1}}{l_{\nu+1}} < \Delta_{\nu+1}. \quad (5.66)$$

Решению задачи оценки соответствующих компонент с заданной точностью (5.58), (5.63) удовлетворяют следующие неравенства для независимого выбора коэффициентов наблюдателя в соответствующих подблоках

$$\frac{\bar{F}_i}{\bar{\Delta}_i} < \bar{l}_i, \quad \frac{\hat{F}_i}{\hat{\Delta}_i} < \hat{l}_i, \quad \frac{\hat{F}_{\nu+1}}{\Delta_{\nu+1}} < l_{\nu+1}. \quad (5.67)$$

Рассмотрим второе–четвертое уравнения системы (5.65), которые соответствуют «последним» $(i+1)$ -м переменным в подблоках относительно $\tilde{\varepsilon}_i$. Производные отрицательны

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{V}}_{i,i+1}, \quad \dot{\tilde{V}}_{i,i+1}, \quad i = \overline{1, \nu-1}; \quad \dot{\tilde{V}}_\nu < 0 \quad \text{при выполнении условий} \quad \tilde{l}_i^{i+1} - \bar{l}_{i+1} > \|\bar{\varepsilon}_{i+1}\| \|\tilde{\varepsilon}_{i,i+1}\|, \\ \tilde{l}_i^{i+1} - \hat{l}_{i+1} > \|\hat{\varepsilon}_{i+1}\| \|\tilde{\varepsilon}_{i,i+1}\|, \quad i = \overline{1, \nu-1}; \quad \tilde{l}_\nu - l_{\nu+1} > \|\varepsilon_{\nu+1}\| \|\tilde{\varepsilon}_\nu\|, \quad \text{и векторы состояния сходятся в} \\ \text{области} \quad \|\tilde{\varepsilon}_{i,i+1}\| \leq \|\bar{\varepsilon}_{i+1}\| / (\tilde{l}_i^{i+1} - \bar{l}_{i+1}), \quad \|\tilde{\varepsilon}_{i,i+1}\| \leq \|\hat{\varepsilon}_{i+1}\| / (\tilde{l}_i^{i+1} - \hat{l}_{i+1}), \quad i = \overline{1, \nu-1}; \\ \|\tilde{\varepsilon}_\nu\| \leq \|\varepsilon_{\nu+1}\| / (\tilde{l}_\nu - l_{\nu+1}), \quad \text{или, учитывая (5.66),} \end{aligned}$$

$$\|\tilde{\varepsilon}_{i,i+1}\| \leq \frac{\bar{F}_{i+1}}{\bar{l}_{i+1} (\tilde{l}_i^{i+1} - \bar{l}_{i+1})} < \tilde{\Delta}_{i,i+1}, \quad (5.68)$$

$$\|\tilde{\varepsilon}_{i,i+1}\| \leq \frac{\hat{F}_{i+1}}{\hat{l}_{i+1}(\tilde{l}_i^{i+1} - \hat{l}_{i+1})} < \tilde{\Delta}_{i,i+1}, \quad i = \overline{1, \nu-1}; \quad \|\tilde{\varepsilon}_\nu\| \leq \frac{\hat{F}_{\nu+1}}{l_{\nu+1}(\tilde{l}_\nu - l_{\nu+1})} < \tilde{\Delta}_\nu.$$

Решению задачи оценивания соответствующих компонент с заданной точностью (5.58), (5.63) удовлетворяют следующие неравенства для независимого выбора коэффициентов наблюдателя:

$$\tilde{l}_i^{i+1} > \frac{\bar{F}_{i+1}}{\bar{l}_{i+1}\tilde{\Delta}_{i,i+1}} + \bar{l}_{i+1}, \quad \tilde{l}_i^{i+1} > \frac{\hat{F}_{i+1}}{\hat{l}_{i+1}\tilde{\Delta}_{i,i+1}} + \bar{l}_{i+1}, \quad i = \overline{1, \nu-1}; \quad \tilde{l}_\nu > \frac{\hat{F}_{\nu+1}}{l_{\nu+1}\Delta_{\nu+1}} + l_{\nu+1}, \quad (5.69)$$

откуда следует соответствующая иерархическая структура выбора коэффициентов:

$$\tilde{l}_i^{i+1} > \bar{l}_{i+1} > \bar{F}_{i+1} / \bar{\Delta}_{i+1}, \quad \tilde{l}_i^{i+1} > \hat{l}_{i+1} > \hat{F}_{i+1} / \hat{\Delta}_{i+1}, \quad i = \overline{1, \nu-1}; \quad \tilde{l}_\nu > l_{\nu+1} > \hat{F}_{\nu+1} / \Delta_{\nu+1}.$$

Наконец, рассмотрим первое уравнение системы (5.65). Производные отрицательны ($\tilde{V}_{ij} < 0$, $j = \overline{\nu+1, i+2}$, $i = \overline{1, \nu-1}$) при выполнении условий $\tilde{l}_i^j - \tilde{l}_{i+1}^j > \|\tilde{\varepsilon}_{i+1,j}\| / \|\tilde{\varepsilon}_{ij}\|$, $j = \overline{\nu+1, i+2}$, $i = \overline{1, \nu-1}$, и векторы состояния сходятся в области $\|\tilde{\varepsilon}_{ij}\| \leq \|\tilde{\varepsilon}_{i+1,j}\| / (\tilde{l}_i^j - \tilde{l}_{i+1}^j)$, или, учитывая (5.68),

$$\begin{aligned} \|\tilde{\varepsilon}_{i,\nu+1}\| &\leq \frac{\hat{F}_{\nu+1}}{l_{\nu+1}(\tilde{l}_\nu - l_{\nu+1})(\tilde{l}_{\nu-1}^{\nu+1} - \tilde{l}_\nu^{\nu+1})(\tilde{l}_{\nu-2}^{\nu+1} - l_{\nu-1}^{\nu+1}) \dots (\tilde{l}_{i+1}^{\nu+1} - \tilde{l}_{i+2}^{\nu+1})(\tilde{l}_i^{\nu+1} - \tilde{l}_{i+1}^{\nu+1})} < \tilde{\Delta}_{i,\nu+1}; \\ \|\tilde{\varepsilon}_{ij}\| &\leq \frac{\bar{F}_j}{\bar{l}_j(\tilde{l}_{j-1}^j - \bar{l}_j)(\tilde{l}_{j-2}^j - \tilde{l}_{j-1}^j) \dots (\tilde{l}_{i+1}^j - \tilde{l}_{i+2}^j)(\tilde{l}_i^j - \tilde{l}_{i+1}^j)} < \tilde{\Delta}_{ij}, \\ \|\tilde{\varepsilon}_{ij}\| &\leq \frac{\hat{F}_j}{\hat{l}_j(\tilde{l}_{j-1}^j - \bar{l}_j)(\tilde{l}_{j-2}^j - \tilde{l}_{j-1}^j) \dots (\tilde{l}_{i+1}^j - \tilde{l}_{i+2}^j)(\tilde{l}_i^j - \tilde{l}_{i+1}^j)} < \tilde{\Delta}_{ij}, \quad j = \overline{\nu, i+2}, \quad i = \overline{\nu-1, 1}. \end{aligned}$$

Решению задачи оценивания соответствующих компонент с заданной точностью (5.58), (5.63) удовлетворяют следующие неравенства для иерархического выбора коэффициентов наблюдателя (5.55)–(5.56):

$$\begin{aligned} \tilde{l}_i^{\nu+1} &> \frac{\hat{F}_{\nu+1}}{l_{\nu+1}(\tilde{l}_\nu - l_{\nu+1})(\tilde{l}_{\nu-1}^{\nu+1} - \tilde{l}_\nu^{\nu+1})(\tilde{l}_{\nu-2}^{\nu+1} - l_{\nu-1}^{\nu+1}) \dots (\tilde{l}_{i+1}^{\nu+1} - \tilde{l}_{i+2}^{\nu+1})\tilde{\Delta}_{i,\nu+1}} + \tilde{l}_{i+1}^{\nu+1}, \\ \tilde{l}_i^{\nu+1} &> \tilde{l}_{i+1}^{\nu+1} > \dots > \tilde{l}_{\nu-2}^{\nu+1} > \tilde{l}_{\nu-1}^{\nu+1} > \tilde{l}_\nu > l_{\nu+1} > \frac{\hat{F}_{\nu+1}}{\Delta_{\nu+1}}, \\ \tilde{l}_i^j &> \frac{\bar{F}_j}{\bar{l}_j(\tilde{l}_{j-1}^j - \bar{l}_j)(\tilde{l}_{j-2}^j - \tilde{l}_{j-1}^j) \dots (\tilde{l}_{i+1}^j - \tilde{l}_{i+2}^j)\tilde{\Delta}_{ij}} + \tilde{l}_{i+1}^j, \quad \tilde{l}_i^j > \tilde{l}_{i+1}^j > \tilde{l}_{i+2}^j > \dots > \tilde{l}_{j-1}^j > \bar{l}_j > \frac{\bar{F}_j}{\Delta_j}, \\ \tilde{l}_i^j &> \frac{\hat{F}_j}{\hat{l}_j(\tilde{l}_{j-1}^j - \bar{l}_j)(\tilde{l}_{j-2}^j - \tilde{l}_{j-1}^j) \dots (\tilde{l}_{i+1}^j - \tilde{l}_{i+2}^j)\tilde{\Delta}_{ij}} + \tilde{l}_{i+1}^j, \\ \tilde{l}_i^j &> \tilde{l}_{i+1}^j > \tilde{l}_{i+2}^j > \dots > \tilde{l}_{j-1}^j > \hat{l}_j > \hat{F}_j / \hat{\Delta}_j, \quad j = \overline{\nu, i+2}, \quad i = \overline{\nu-1, 1}. \end{aligned} \quad (5.70)$$

При выборе элементов матриц L_i , $i = \overline{1, \nu+1}$ в виде (5.67), (5.69), (5.70) выполняется условие

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^{v-1} \left(\sum_{j=v+1}^{i+2} \dot{\tilde{V}}_{ij} + \dot{\tilde{V}}_{i,i+1} + \dot{\tilde{V}}_{i,i+1} \right) + \dot{\tilde{V}}_v + \sum_{i=1}^v (\dot{\tilde{V}}_i + \dot{\tilde{V}}_i) + \dot{V}_{v+1} < 0,$$

и, следовательно, квадратичная форма (5.64) является функцией Ляпунова для системы (5.62). Система (5.62) устойчива в рассматриваемой области, и задача оценки вектора s решается с заданной точностью (5.58), (5.63), что и требовалось доказать.

5.5. Прямой синтез наблюдателя на скользящих режимах

На основе представления исходной системы в блочно-наблюдаемой форме с учетом возмущений (5.35) в предыдущих разделах главы решена задача наблюдения неизмеряемых компонент вектора состояния нелинейной системы при наличии внешних возмущений, в том числе и с заданной точностью при конечных коэффициентах наблюдателя (раздел 5.4). В приводимых ниже результатах показывается, что если не задаваться целью априори получить блочное представление, можно существенно упростить решение задачи наблюдения. В данном разделе разработана процедура поэтапного синтеза наблюдателя с разрывными управляющими воздействиями, позволяющая избежать интегральных преобразований (в отличие от процедуры раздела 5.2), так как к регулярной форме относительно возмущений будут приводиться не дифференциальные, а алгебраические уравнения. Суть данной процедуры заключается в синхронизации анализа и синтеза за счет последовательного построения каждого блока наблюдателя на скользящих режимах, сопровождаемого анализом структуры наблюдаемости соответствующего блока системы. Большая часть данной процедуры совпадает с преобразованиями, выполняемыми в процессе получения блочной формы из раздела 5.2. Чтобы избежать повторений, в таких случаях даются ссылки на соответствующие формулы.

Процедура синхронного анализа и синтеза.

Шаг 1. а) Представим исходную систему (5.1) в виде (5.3) в соответствии с преобразованиями пункта (а) первого шага процедуры приведения системы к БНФВ (см. раздел 5.2). Для первого уравнения системы (5.3), в котором вектор $y_1 \in R^{m_1}$ доступен для измерения, построим наблюдатель состояния вида $\dot{z}_1 = v_1$ с вектором состояния $z_1 \in R^{m_1}$, что приведет к уравнению относительно невязки $\varepsilon_1 = y_1 - z_1$, $\varepsilon_1 \in R^{m_1}$:

$$\dot{\varepsilon}_1 = h_1(y_1, x_1, w_1^*) + Q_1(y_1, x_1, w_0^*)\eta - v_1, \quad (5.71)$$

В системе (5.71) введем обозначение

$$g_1(y_1, x_1, w_1^*) = h_1(y_1, x_1, w_1^*) + Q_1(y_1, x_1, w_0^*)\eta, \quad g_1 \in R^{m_1} \quad (5.72)$$

и сформируем разрывное управляющее воздействие $v_1 = M_1 \text{sign} \varepsilon_1$, $v_1 \in R^{m_1}$ с амплитудой $M_1 > \|g_1\|$, что приведет к возникновению в системе (5.71) скользящего режима по многообразию $\varepsilon_1 = 0 \Rightarrow y_1 = z_1$. Согласно методу эквивалентного управления из выражения $\dot{\varepsilon}_1 = 0$ получим оценки компонент вектор-функции g_1 :

$$v_{1\text{eq}} = g_1. \quad (5.73)$$

Предположив, что в системе (5.72) $\text{rank}\{Q_1, \partial h_1 / \partial x_1\} = d_1$, $\text{rank} Q_1 = p_1$, $p_1 < d_1 \leq m_1$, расцепим ее на два уравнения аналогично представлению (5.4):

$$\begin{aligned} \hat{g}_1 &= \hat{h}_1(\hat{y}_1, \hat{y}_1, x_1, w_1^*) + \hat{Q}_1(\hat{y}_1, \hat{y}_1, x_1, w_0^*)\eta, \\ \hat{g}_1 &= \hat{h}_1(\hat{y}_1, \hat{y}_1, x_1, w_1^*) + \hat{Q}_1(\hat{y}_1, \hat{y}_1, x_1, w_0^*)\eta, \\ g_1 &= \begin{pmatrix} \hat{g}_1 \\ \hat{g}_1 \end{pmatrix}, \hat{g}_1 \in R^{m_1-p_1}, \hat{g}_1 \in R^{p_1}, Q_1 = \begin{pmatrix} \hat{Q}_1 \\ \hat{Q}_1 \end{pmatrix}, \text{rank} Q_1 = \text{rank} \hat{Q}_1 = p_1, \end{aligned} \quad (5.74)$$

Если ранг матрицы Q_1 в системе (5.71) неполный, налагаем связи на компоненты вектора η так, чтобы получить матрицу $Q_1^*(y_1, x_1, w_0^*)$ полного ранга (5.5).

б) Поскольку система (5.74) алгебраическая, то для приведения ее к регулярной форме относительно возмущений η не требуется выполнять интегральные преобразования. Если все строки произведения матриц

$$\hat{Q}_1(y_1, x_1, w_0^*)\hat{Q}_1^+(y_1, x_1, w_0^*) \quad (5.75)$$

зависят от компонент вектора x_1 , то процедура заканчивается (см. замечание 5.1), и компоненты $x_1 \in R^{n-m_1}$ образуют ненаблюдаемое подпространство. Если произведение матриц (5.75) не зависит от компонент вектора x_1 , то сформируем вектор

$$g_1' = \hat{g}_1 - \hat{Q}_1\hat{Q}_1^+\hat{g}_1, \quad g_1' \in R^{m_1-p_1}, \quad (5.76)$$

который полностью или частично (если часть строк (5.75) зависят от компонент x_1 , см. замечание 5.2) не зависит от возмущений и от вектора x_1 . Неособая замена позволяет представить систему (5.74) в регулярной форме относительно возмущений:

$$g_1' = h_1'(y_1, x_1, w_1^*), \quad \hat{g}_1 = \hat{h}_1(\hat{y}_1, \hat{y}_1, x_1, w_1^*) + \hat{Q}_1(\hat{y}_1, \hat{y}_1, x_1, w_0^*)\eta. \quad (5.77)$$

Заметим, что в данном случае (в отличие от процедуры раздела 5.2) на выражение (5.75) не налагается требование интегрируемости.

в) Если в системе (5.72) выполняется условие $d_1 < m_1$, то первое уравнение (5.77) с помощью перестановки строк расщепляется на две подсистемы $\tilde{g}_1 = \tilde{h}_1(y_1, x_1, w_1^*)$, $\bar{g}_1 = \bar{h}_1(y_1, x_1, w_1^*)$, где $g_1' = \text{col}(\tilde{g}_1, \bar{g}_1)$, $\bar{g}_1 \in R^{m_1-d_1}$, $\dim \tilde{g}_1 = \text{rank}\{\partial \tilde{h}_1 / \partial x_1\} = d_1 - p_1 = m_2$.

Далее переходим ко второму шагу процедуры, на котором преобразования, описанные на первом шаге, применяются к системе $\dot{x}_1 = f_1(y_1, x_1, w_1^*) + Q_{x1}(y_1, x_1, w_0^*)\eta$, $x_1 \in R^{n-m_1}$, $y_2 = \tilde{g}_1$, $y_2 \in R^{m_2}$, где значения компонент вектора y_2 известны, и т.д.

Шаг i. а) Продолжая указанную процедуру, на i -м шаге рассмотрим систему (5.28), где компоненты вектора $y_i = \tilde{g}_{i-1} = \tilde{h}_{i-1}(y_{i-1}^*, x_{i-1}, w_{i-1}^*)$ известны, $y_i(v_{(i-1)\text{eq}}) \in R^{m_i}$. Представим систему (5.28) в виде (5.29). Для первого уравнения системы (5.29) построим наблюдатель состояния $\dot{z}_i = v_i$ с вектором состояния $z_i \in R^{m_i}$, что приведет к уравнению относительно невязки $\varepsilon_i = y_i - z_i$, $\varepsilon_i \in R^{m_i}$:

$$\dot{\varepsilon}_i = h_i(y_i^*, x_i, w_i^*) + Q_i(y_i^*, x_i, w_{i-1}^*)\eta - v_i. \quad (5.78)$$

В системе (5.78) обозначим

$$g_i(y_i^*, x_i, w_i^*) = h_i(y_i^*, x_i, w_i^*) + Q_i(y_i^*, x_i, w_{i-1}^*)\eta, \quad g_i \in R^{m_i} \quad (5.79)$$

и сформируем разрывное управляющее воздействие $v_i = M_i \text{sign} \varepsilon_i$, $v_i \in R^{m_i}$ с амплитудой $M_i > \|g_i\|$, что приведет к возникновению в системе (5.78) скользящего режима по многообразию $\varepsilon_i = 0 \Rightarrow y_i = z_i$. Согласно методу эквивалентного управления из выражения $\dot{\varepsilon}_i = 0$ получим оценки компонент вектор-функции g_i :

$$v_{ieq} = g_i. \quad (5.80)$$

Замечание 5.7. Если на i -м шаге возможно представление первого уравнения системы (5.29) в виде, аналогичном (5.36), а именно

$$\dot{y}_i = \varphi_{i1}(y_i^*, w_i^*) + \check{h}_i(y_i^*, x_i, w_i^*) + Q_i(y_i^*, x_i, w_{i-1}^*)\eta,$$

где $h_i(y_i^*, x_i, w_i^*) = \varphi_{i1}(y_i^*, w_i^*) + \check{h}_i(y_i^*, x_i, w_i^*)$, то наблюдатель состояния строится в виде $\dot{z}_i = \varphi_{i1}(y_i^*, w_i^*) + v_i$. Данные построения приведут к упрощению вычислений и уменьшению амплитуды разрывных управлений, если $\|\check{h}_i(y_i^*, x_i, w_i^*) + Q_i(y_i^*, x_i, w_{i-1}^*)\eta\| < \|g_i\|$.

Предположив, что в системе (5.79) $\text{rank}\{Q_i, \partial h_i / \partial x_i\} = d_i$, $\text{rank} Q_i = p_i$, $p_i < d_i \leq m_i$, перестановкой строк расщепим ее на две подсистемы

$$\begin{aligned} \hat{g}_i &= \hat{h}_i(y_i^*, x_i, w_i^*) + \hat{Q}_i(y_i^*, x_i, w_{i-1}^*)\eta, \\ \hat{g}_i &= \hat{h}_i(y_i^*, x_i, w_i^*) + \hat{Q}_i(y_i^*, x_i, w_{i-1}^*)\eta, \\ g_i &= \begin{pmatrix} \hat{g}_i \\ \hat{g}_i \end{pmatrix}, \quad \hat{g}_i \in R^{m_i - p_i}, \quad Q_i = \begin{pmatrix} \hat{Q}_i \\ \hat{Q}_i \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.81)$$

так, чтобы $\dim \hat{g}_i = \text{rank} Q_i = \text{rank} \hat{Q}_i = p_i$, где $\dim \hat{Q}_i = (m_i - p_i) \times p$, $\dim \hat{Q}_i = p_i \times p$. Если $p_i < p$, то налагаем связи на компоненты вектора η в уравнениях (5.81) $\eta = \hat{Q}_i^+ \phi_i$, $\phi_i \in R^{p_i}$, чтобы получить матрицу $Q_i^*(y_i^*, x_i, w_{i-1}^*)$ полного ранга (5.31).

б) Рассмотрим произведение матриц

$$\hat{Q}_i(y_i^*, x_i, w_{i-1}^*) \hat{Q}_i^+(y_i^*, x_i, w_{i-1}^*). \quad (5.82)$$

Заметим, что в данном случае ослабляются требования к аргументам произведения (5.82), в числе которых не должно быть только неизвестных на данный момент компонент вектора x_i (в отличие от процедуры раздела 5.2, где аналогичное произведение (5.82) не должно было зависеть также от компонент вектора \hat{y}_{i-1}^*). Если указанное требование выполняется, то сформируем вектор

$$g'_i = \hat{g}_i - \hat{Q}_i \hat{Q}_i^+ \hat{g}_i, g'_i \in R^{m_i - p_i}, \quad (5.83)$$

который полностью (или частично, если часть строк (5.82) зависят от компонент x_i) не зависит от возмущений и не восстановленных на этом этапе компонент вектора состояний. Неособая замена (5.83) позволяет представить систему (5.81) в регулярной форме относительно возмущений:

$$g'_i = h'_i(y_i^*, x_i, w_i^*), \hat{g}_i = \hat{h}_i(y_i^*, x_i, w_i^*) + \hat{Q}_i(y_i^*, x_i, w_{i-1}^*)\eta. \quad (5.84)$$

в) Если $d_i < m_i$, то первое уравнение системы (5.84) можно перестановкой строк расщепить на две подсистемы $\tilde{g}_i = \tilde{h}_i(y_i^*, x_i, w_i^*)$, $\bar{g}_i = \bar{h}_i(y_i^*, x_i, w_i^*)$, где $g'_i = \text{col}(\tilde{g}_i, \bar{g}_i)$, $\dim \tilde{g}_i = \text{rank}\{\tilde{\mathcal{A}}_i / \tilde{\mathcal{A}}_i\} = d_i - p_i = m_{i+1}$, $\bar{g}_i \in R^{m_i - d_i}$. Если $m_{i+1} < n - m_1 - \dots - m_i$, то переходим к следующему шагу процедуры, на котором описанные преобразования применяются к системе $\dot{x}_i = f_i(y_i^*, x_i, w_i^*) + Q_{xi}(y_i^*, x_i, w_{i-1}^*)\eta$, $y_{i+1} = \tilde{g}_i = \tilde{h}_i(y_i^*, x_i, w_i^*)$, где известный на данный момент вектор $y_{i+1} \in R^{m_{i+1}}$ рассматривается в качестве фиктивного выхода, и т.д.

Заметим, что условия окончания процедуры в данном случае аналогичны условиям из раздела 5.2. Предположим, что на ν -м шаге выполнилось условие

$$\dim x_\nu = m_{\nu+1} = n - m_1 - \dots - m_\nu. \quad (*)$$

Обозначив $y_{\nu+1} = \tilde{g}_\nu(v_{\text{eq}}) = \tilde{h}_\nu(y_\nu^*, x_\nu, w_\nu^*)$, где $\text{rank}\{\tilde{\mathcal{A}}_\nu / \tilde{\mathcal{A}}_\nu\} = m_{\nu+1}$, и проведя диффеоморфную локальную замену переменных $x_\nu = \tilde{h}_\nu^{-1}(y_{\nu+1}^*, w_\nu^*)$, получим последний блок вида

$$\dot{y}_{\nu+1} = h_{\nu+1}(y_{\nu+1}^*, w_{\nu+1}^*) + Q_{\nu+1}(y_{\nu+1}^*, w_\nu^*)\eta. \quad (5.85)$$

Согласно предыдущим построениям в системе (5.85) неизвестным является только вектор возмущений η . Если ставится задача восстановления линейных комбинаций возмущающих воздействий, то для системы (5.85) строится наблюдатель состояния $\dot{z}_{\nu+1} = h_{\nu+1}(y_{\nu+1}^*, w_{\nu+1}^*) + v_{\nu+1}$, что приведет к уравнению относительно невязок $\varepsilon_{\nu+1} = y_{\nu+1} - z_{\nu+1}$: $\dot{\varepsilon}_{\nu+1} = Q_{\nu+1}(y_{\nu+1}^*, w_\nu^*)\eta - v_{\nu+1}$. Формирование разрывного управления $v_{\nu+1} = M_{\nu+1} \text{sign} \varepsilon_{\nu+1}$, $\varepsilon_{\nu+1}, v_{\nu+1} \in R^{m_{\nu+1}}$, $M_{\nu+1} = \|Q_{\nu+1}(y_{\nu+1}^*, w_\nu^*)\eta\|$ приведет к возникновению скользящего режима по многообразию $\varepsilon_{\nu+1} = 0 \Rightarrow y_{\nu+1} = z_{\nu+1}$. Согласно методу эквивалентного управления из выражения $\dot{\varepsilon}_{\nu+1} = 0$ получим

$$v_{(\nu+1)\text{eq}} = Q_{\nu+1}(y_{\nu+1}^*, w_\nu^*)\eta. \quad (5.86)$$

Поскольку на данный момент все компоненты вектора состояния $y_{\nu+1}^*$ известны, то из выражений типа (5.79) с учетом (5.80)–(5.81) можно получить оценки остальных линейных комбинаций вектора возмущений: $\hat{Q}_i(y_{\nu+1}^*, w_\nu^*)\eta = \hat{g}_i - \hat{h}_i(y_{\nu+1}^*, w_\nu^*)$, $\hat{g}_i = \hat{v}_{i\text{eq}}$, $i = \overline{1, \nu}$, при условии, что параметры вектор-функций $\hat{h}_i(y_{\nu+1}^*, w_\nu^*)$ известны.

Если на ν -м шаге произведение матриц $\hat{Q}_\nu(y_\nu^*, x_\nu, w_{\nu-1}^*)\hat{Q}_\nu^+(y_\nu^*, x_\nu, w_{\nu-1}^*)$ полностью

зависит от компонент вектора x_v или в независимых от x_v строках ранг якобиана по x_v равен нулю (**), или выполнилось условие (***), то сформировав вектор (5.83), повторяем описанную в данном разделе процедуру, и т.д.

В заключение данного раздела отметим, что, поскольку каждый этап синтеза наблюдателя состояния сопровождался анализом структурных свойств наблюдаемости (с опосредованным получением блочной формы наблюдаемости с учетом возмущений), данная процедура позволяет с необходимостью и достаточностью выделить локально наблюдаемое подпространство вектора состояния максимально возможной размерности в сделанных предположениях о том, что компоненты вектора внешних возмущений являются негладкими (недифференцируемыми) функциями времени. Данная методика может быть реализована и в более узкой постановке, когда предполагается, что внешние возмущения являются дифференцируемыми функциями времени или порождаются некоторой динамической моделью.

В заключение главы кратко сформулируем полученные результаты.

Каскадный метод синтеза наблюдателей состояния распространен на нелинейные системы общего вида при наличии внешних неконтролируемых возмущений. По сравнению с известными результатами, расширен класс допустимых возмущений при решении задач наблюдения за счет негладких функций времени и, возможно, класс инвариантных систем за счет получения оценок линейных комбинаций неизмеряемых возмущений, которые могут быть использованы при синтезе обратной связи.

Разработана пошаговая процедура приведения исходной системы к блочно-наблюдаемой форме с учетом возмущений с выделением наблюдаемого подпространства вектора состояния максимально возможной размерности. В терминах преобразованной системы сформулированы ранговые условия наблюдаемости нелинейных систем при наличии внешних возмущений (раздел 5.2).

На основе полученной блочной формы разработаны два типа каскадных процедур синтеза наблюдателей состояния в классе систем с разделяемыми движениями: 1) с разрывными управлениями; 2) с глубокими обратными связями. В первой процедуре на основе метода эквивалентного управления за теоретически конечное время восстанавливаются неизмеряемые компоненты вектора состояния, а также возмущений (раздел 5.3). Во второй процедуре в допредельной ситуации решается задача оценки неизмеряемых компонент вектора состояния с заданной точностью и с сохранением декомпозиции процедуры синтеза (раздел 5.4).

В разделе 5.5 разработана процедура поэтапного синтеза наблюдателя с разрывными управляющими воздействиями, позволяющая, в отличие от процедуры из раздела 5.2, избежать интегральных преобразований и решить задачу оценивания неизмеряемых компонент вектора состояния и линейных комбинаций внешних возмущений за теоретически конечное время.

Часть 3. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

Разработанная в теоретических главах методика каскадного синтеза наблюдателей состояния, позволяющая существенно сократить объем априорной информации об операторе объекта управления и среде его функционирования, может найти применение в задачах оценивания неизмеряемых компонент вектора состояния и вектора возмущений для широкого класса современных сложных технологических объектов автоматического управления. В следующих главах разработанные алгоритмы применяются к моделям конкретных объектов управления с учетом их особенностей. В главе 6 решается задача наблюдения для асинхронного бездатчикового электропривода, нелинейная модель которого приводится к блочно-наблюдаемой форме. На примере полученного блочного представления проиллюстрированы все типы каскадных процедур синтеза наблюдателей состояния, разработанных в главе 4. В главе 7 в качестве объекта управления рассматривается манипуляционный робот с учетом динамики электроприводов, для которого в рамках каскадного подхода решена задача синтеза обратной связи по восстановленным с помощью наблюдателя состояния переменным. В главе 8 предложены ряд алгоритмов блочного синтеза линейных систем с релейными измерениями с запаздывающим аргументом, в качестве объекта управления рассматриваются модели топливоподачи и воздухоподачи двигателя внутреннего сгорания.

Глава 6. КАСКАДНЫЙ СИНТЕЗ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ СОСТОЯНИЯ АСИНХРОННОГО ЭЛЕКТРОПРИВОДА

В последнее время в качестве исполнительных устройств все чаще применяется регулируемый привод переменного тока на основе асинхронного двигателя (АД) с короткозамкнутым ротором (КЗР), управляемым от преобразователя частоты (ПЧ) на базе силовых транзисторных ключей (IGBT-модули, MOSFET-модули и др.). Достоинства таких приводов широко известны. Основными преимуществами здесь являются: сравнительная простота конструкции, повышенные надежность и технологичность, возможность получения более высокого КПД по сравнению с приводами на основе прочих типов двигателей. Другим важным направлением развития современного регулируемого электропривода переменного тока является разработка так называемых бездатчиковых приводов различных типов, имеющих цифровую систему управления на основе специализированного микроконтроллера, в качестве которого в последнее время находят применение сигнальные процессоры (DSP). Подобные электроприводы становятся дешевле и надежней в эксплуатации благодаря отсутствию часто дорогостоящих датчиков. Однако здесь, как правило, требуется многократное увеличение количества вычислительных операций на единицу времени, выполняемых системой управления по расчету сигналов обратных связей привода, вызванное необходимостью идентификации его неизмеряемых переменных, что, впрочем, не является непреодолимой трудностью, учитывая быстрый рост производительности современной микропроцессорной техники.

Вопросы оценивания неизмеряемых переменных в приводе постоянного тока с независимым возбуждением (линейном объекте), как и вопросы синтеза системы управления таким приводом, достаточно просты. Между тем синтез регулируемого электропривода на основе АД с КЗР существенно затруднен сложностью математического описания двигателя, как объекта управления. В случае применения принципов оптимального или адаптивного управления АД с КЗР требуется измерение всех переменных состояния динамической модели двигателя. Ряд переменных (потокосцепление, токи ротора, момент нагрузки на валу) не могут быть непосредственно измерены в промышленных условиях, что приводит к необходимости получения их оценок.

Разработанные применительно к нелинейным системам различные каскадные процедуры синтеза наблюдателей состояния (см. главу 4) в данной главе применяются для решения за-

дачи наблюдения переменных состояния асинхронного бездатчикового электропривода. В разделе 6.1 приводится динамическая модель асинхронного электропривода. В разделе 6.2 получена блочно–наблюдаемая «нижняя треугольная» форма нелинейной динамической модели электропривода, которая является предпосылкой декомпозиции задачи синтеза наблюдателя состояния. В разделе 6.3 на качественном уровне продемонстрирован каскадный синтез наблюдателей состояния на основе метода разделения движений в классе систем с большими коэффициентами и разрывными управлениями с обеспечением грубости к параметрическим неопределенностям оператора объекта управления. В разделе 6.4 приводятся результаты по количественной оценке снизу коэффициентов наблюдателя с сохранением декомпозиции процедуры синтеза, что позволяет решить задачу оценки компонент вектора состояния с заданной точностью с конечными коэффициентами.

6.1. Описание динамической модели асинхронного двигателя (АД)

В качестве объекта управления рассматривается асинхронный электропривод. Динамическая модель АД описывается в неподвижной системе координат (α, β) в векторном виде системой нелинейных дифференциальных уравнений шестого порядка [42, 51]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1[a_2 P(x_3)x_2 - a_5 x_1 + U], \quad \dot{x}_2 = -P(x_3)x_2 + a_4 x_1, \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{J}(a_2 x_1^T S x_2 - x_4), \quad \dot{x}_4 = 0, \end{aligned} \quad (6.1)$$

где $x_1 = \text{col}(x_{1\alpha}, x_{1\beta})$ – токи статора, $x_2 = \text{col}(x_{2\alpha}, x_{2\beta})$ – компоненты потокосцепления ротора, $x_3 \in R$ – скорость вращения ротора, $x_4 \in R$ – момент нагрузки на валу (полагается в качестве неизвестного постоянного внешнего возмущения), $U = \text{col}(U_\alpha, U_\beta)$ – напряжения питания статора по осям α и β , которое рассматривается как управляющее воздействие,

$$P(x_3) = \begin{vmatrix} a_3 & x_3 \\ -x_3 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \quad S = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad a_1 = \frac{L_r}{L_s L_r - L_h^2}, \quad a_2 = \frac{L_h}{L_r}, \quad a_3 = \frac{R_r}{L_r},$$

где $a_4 = R_r a_2$, $a_5 = a_2 a_4 + R_s$; R_s, R_r, L_s, L_r, L_h – приведенные активные и индуктивные сопротивления статора, ротора и взаимной индукции, $a_1, \dots, a_5 > 0$. Для реализации обратной связи по всем компонентам вектора состояния ставится следующая задача: получить информацию о компонентах вектора потокосцепления, скорости и моменте нагрузки в предположении, что измеряются только компоненты тока статора $x_{1\alpha}, x_{1\beta}$.

6.2. Приведение динамической модели АД к блочно-наблюдаемой форме

Процедура преобразования нелинейной системы (6.1) к блочно-наблюдаемой «нижней треугольной» форме состоит из конечного числа шагов, на каждом из которых вводится несобая замена части координат вектора состояния, по которым минор матрицы частных производных функций вектора выходных переменных имеет полный ранг, новыми переменными, которые трактуются как фиктивный выход для оставшейся части системы. Такое преобразование позволяет представить исходную систему в виде конечного числа блоков, в каждом из которых может быть независимо решена элементарная задача наблюдения, поскольку размерность преобразованного вектора состояния каждого блока совпадает с размерностью

его фиктивного выхода. Теоретические предпосылки данной методологии рассмотрены в разделе 4.2.

На первом шаге вводится неособая замена переменных $y_1 = x_1$, где $y_1 \in R^2$ – измеряемый выход первого блока:

$$\dot{y}_1 = -a_1 a_5 y_1 + a_1 a_2 h_1 + a_1 U, \quad (6.2)$$

где $h_1 = P(x_3)x_2 = P(0)x_2 + x_3 Sx_2$, $\text{rank}\{\partial h_1 / \partial x_2\} = 2$.

На втором шаге вводится неособая замена переменных $y_2 = h_1(x_2, x_3)$, где $y_2 \in R^2$ рассматривается в качестве фиктивного выхода для второго блока:

$$\dot{y}_2 = P(0)\dot{x}_2 + \dot{x}_3 Sx_2 + x_3 S\dot{x}_2 = a_3 a_4 y_1 - a_3 y_2 + h_2, \quad (6.3)$$

где $h_2 = \dot{x}_3 Sx_2 + x_3 S\dot{x}_2$, $\text{rank}\{\partial h_2 / \partial(x_3, x_4)\} = 2$. Заметим, что в системе (6.1) управление U входит только в первое уравнение, с которого начинаются преобразования. Тот факт, что в подсистему (6.2) управление входит линейно, и каналы его вхождения не зависят от переменных состояния, позволяет исключить управление из дальнейших преобразований.

На третьем шаге вводится неособая замена переменных $y_3 = h_2$, где вектор $y_3 \in R^2$ рассматривается в качестве фиктивного выхода для третьего блока:

$$\dot{y}_3 = \ddot{x}_3 Sx_2 + 2\dot{x}_3 S\dot{x}_2 + x_3 S\ddot{x}_2 = h_3, \quad (6.4)$$

где $\ddot{x}_3 = \frac{a_2}{J}(\dot{y}_1^T S P^{-1}(x_3)y_2 + y_1^T S(-y_2 + a_4 y_1))$, $\ddot{x}_2 = (-a_3 a_4 - a_5 a_1 a_4)y_1 + (a_3 + a_1 a_2 a_4)y_2 - h_2$, и система нелинейных уравнений $x_2 = h_1^{-1}(x_3, y_2)$, $x_3 = h_2^{-1}(x_4, y_1, y_2, y_3)$, $x_4 = h_2^{-1}(x_3, y_1, y_2, y_3)$ задает обратное преобразование координат.

Таким образом, для системы (6.1) получена блочно-наблюдаемая «нижняя треугольная» форма типа (4.60) в виде (6.2)–(6.4):

$$\dot{y}_1 = -a_1 a_5 y_1 + a_1 a_2 y_2 + a_1 U, \quad \dot{y}_2 = a_3 a_4 y_1 - a_3 y_2 + y_3, \quad \dot{y}_3 = h_3(y). \quad (6.5)$$

Тот факт, что все уравнения исходной системы (6.1) были задействованы в ходе преобразований к виду (6.5) свидетельствует о том, что исходная система наблюдаема относительно выхода $y_1 = x_1$. В наблюдаемости исходной системы мы убедились конструктивно, по ходу процедуры преобразований. Заметим, что в данном частном случае по сравнению с представлением (4.60) в системе (6.5) размерность блоков одинакова и на подблоки они не разделяются. Кроме того, функции типа φ_{i1} являются линейными ($\varphi_{11} = -a_1 a_5 y_1$, $\varphi_{21} = a_3 a_4 y_1 - a_3 y_2$), а φ_{i2} – коэффициентами ($\varphi_{12} = a_1 a_2$, $\varphi_{22} = 1$). Структура исходной нелинейной модели шестого порядка (6.1) такова, что ее представление в виде (6.5) является квазилинейной треугольной блочной формой, состоящей из трех блоков, где $(2, 2, 2)$ – вектор индексов наблюдаемости.

6.3. Каскадный синтез наблюдателя АД на основе метода разделения движений

В данном разделе предложена каскадная процедура синтеза наблюдателя состояния для системы, преобразованной к блочно-наблюдаемой форме (6.5), которая принимается за основу наблюдателя с вектором состояния $z = \text{col}(z_1, z_2, z_3)$ и корректирующими воздействиями $v_i, i = \overline{1, 3}$:

$$\dot{z}_1 = -a_1 a_5 z_1 + a_1 a_2 z_2 + a_1 U + v_1, \quad \dot{z}_2 = a_3 a_4 z_1 - a_3 z_2 + z_3 + v_2, \quad \dot{z}_3 = h_3(z) + v_3. \quad (6.6)$$

В отличие от собственно задач управления, где каналы вхождения управляющих воздействий определяются моделью объекта управления, в задаче наблюдения корректирующие воздействия наблюдателя по невязкам формируются так, чтобы в каждом блоке размерности вектора состояния наблюдателя и его корректирующих воздействий совпадали. В данном случае $\dim u_i = \dim v_i = \dim z_i = 2, i = \overline{1, 3}$. Для текущего блока управляющее воздействие формируется из его фиктивного выхода, величина которого определяется на предыдущем шаге. Следовательно, на каждом шаге решаются элементарные задачи наблюдения с применением метода разделения движений (в классе систем с большими коэффициентами и разрывными управлениями), что позволяет декомпозировать задачу синтеза шестой размерности на последовательно решаемые три элементарные подзадачи второй размерности каждая. Структурная схема наблюдателя (6.6) представлена на рис. 6.1.

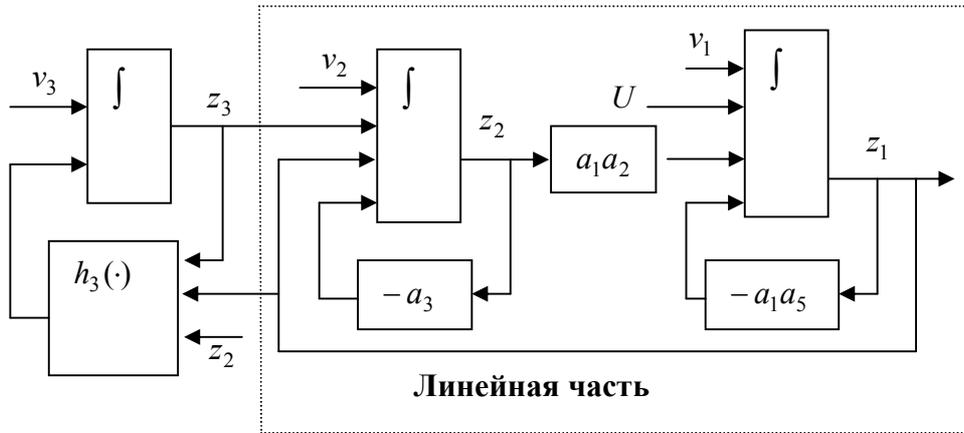


Рис. 6.1. Структурная схема наблюдателя состояния АД (6.6)

Задача наблюдения сводится к пошаговой стабилизации системы, записанной относительно невязок $\varepsilon_i = y_i - z_i, \dim \varepsilon_i = \dim z_i = 2, i = \overline{1, 3}$:

$$\dot{\varepsilon}_1 = -a_1 a_5 \varepsilon_1 + a_1 a_2 \varepsilon_2 - v_1, \quad \dot{\varepsilon}_2 = a_3 a_4 \varepsilon_1 - a_3 \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - v_2, \quad \dot{\varepsilon}_3 = h_3(z + \varepsilon) - h_3(z) - v_3. \quad (6.7)$$

На первом шаге решается задача обеспечения стабилизации переменных ε_1 и задача нахождения фиктивного выхода для второй подсистемы ε_2 . Для этого выберем управляющие воздействия наблюдателя состояний в виде: $v_1 = k_1 \varepsilon_1$ или $v_1 = M_1 \text{sign} \varepsilon_1$, где $v_1 = \text{col}(v_{11}, v_{12}), \text{sign} \varepsilon_1 = \text{col}(\text{sign} \varepsilon_{11}, \text{sign} \varepsilon_{12}), k_1, M_1 = \text{const} > 0$. Тогда уравнение первого блока системы (6.7) примет вид $\dot{\varepsilon}_1 = -a_1 a_5 \varepsilon_1 + a_1 a_2 \varepsilon_2 - k_1 \varepsilon_1$ или $\dot{\varepsilon}_1 = -a_1 a_5 \varepsilon_1 + a_1 a_2 \varepsilon_2 - M_1 \text{sign} \varepsilon_1$. Поскольку $a_1, a_5 > 0$, собственные движения переменных

первого блока системы (6.7) устойчивы. При $k_1 \rightarrow +\infty$ или $M_1 > \|a_1 a_2 \varepsilon_2\| - a_1 a_5$ организуются быстрые движения в первом блоке системы (6.7) и обеспечивается стабилизация переменных ε_1 : в первом случае – асимптотически, $\lim_{k_1 \rightarrow \infty} \varepsilon_1 = 0 \Rightarrow z_1 \rightarrow y_1$, во втором – за конечное время,

$\varepsilon_1 = 0 \Rightarrow z_1 = y_1$ при $t > t_1$. Из соотношения статики $\dot{\varepsilon}_1 = 0$ находится эквивалентное управление $v_{1eq} = a_1 a_2 \varepsilon_2$, которое принимается в качестве фиктивного выхода для второго блока.

На втором шаге решается задача обеспечения стабилизации переменных ε_2 и задача определения величины фиктивного выхода ε_3 для третьего блока. Для решения поставленных задач выберем управляющие воздействия наблюдателя состояния в виде $v_2 = k_2(v_{1eq} / a_1 a_2)$ или $v_2 = M_2 \text{sign}(v_{1eq} / a_1 a_2) = M_2 \text{sign} v_{1eq}$, где $v_2 = \text{col}(v_{21}, v_{22})$, $k_2, M_2 = \text{const} > 0$, $a_1, a_2 > 0$. С учетом выбранной обратной связи уравнения второго блока системы (6.7) можно записать в виде $\dot{\varepsilon}_2 = a_3 a_4 \varepsilon_1 - a_3 \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - k_2 \varepsilon_2$ или $\dot{\varepsilon}_2 = a_3 a_4 \varepsilon_1 - a_3 \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - M_2 \text{sign} \varepsilon_2$. Стабилизация переменных второго блока ε_2 возможна только после стабилизации переменных первого блока ε_1 и при $k_2 \rightarrow +\infty$ или $M_2 > \|\varepsilon_3\| - a_3$. Заметим, что собственные движения переменных второго блока устойчивы, поскольку $a_3 > 0$. Тогда при организации линейной обратной связи во втором блоке осуществляется асимптотическая стабилизация переменных ε_2 : $\lim_{k_2 \rightarrow \infty} \varepsilon_2 = 0 \Rightarrow z_2 \rightarrow y_2$, при организации разрывной обратной связи – за теоретически конечное время: $\varepsilon_2 = 0 \Rightarrow z_2 = y_2$ при $t > t_2 > t_1$. Из соотношения статики $\dot{\varepsilon}_2 = 0$ находится эквивалентное управление $v_{2eq} = \varepsilon_3$, которое принимается в качестве фиктивного выхода для последнего блока системы (6.7).

На третьем шаге управляющие воздействия наблюдателя выбирают в виде: $v_3 = k_3 v_{2eq}$ или $v_3 = M_3 \text{sign}(v_{2eq})$, где $k_3, M_3 = \text{const} > 0$, что позволяет представить третий блок системы (6.7) в виде $\dot{\varepsilon}_3 = h_3(z + \varepsilon) - h_3(z) - k_3 \varepsilon_3$ или $\dot{\varepsilon}_3 = h_3(z + \varepsilon) - h_3(z) - M_3 \text{sign} \varepsilon_3$. Переменные третьего блока асимптотически стабилизируются при $k_3 \rightarrow +\infty$: $\lim_{k_3 \rightarrow \infty} \varepsilon_3 = 0 \Rightarrow z_3 \rightarrow y_3$ или за теоретически конечное время $\varepsilon_3 = 0 \Rightarrow z_3 = y_3$ ($t > t_3 > t_2$) при выполнении условия $M_3 > \|h_3(z + \varepsilon) - h_3(z)\|$ или с учетом того, что переменные $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ уже равны нулю, при $M_3 > \|h_3(z_1, z_2, z_3 + \varepsilon_3) - h_3(z)\|$.

Стабилизация системы (6.7) основана на организации многотемповых быстрых движений, которые возникают последовательно в блоках системы (6.7). При $k_i \rightarrow \infty$, $i = \overline{1, 3}$, выбранных в соответствии с иерархией $k_1 > k_2 > k_3$, невязки в блоках системы последовательно асимптотически стремятся к нулю: $\varepsilon_1 \rightarrow 0 \Rightarrow \varepsilon_2 \rightarrow 0 \Rightarrow \varepsilon_3 \rightarrow 0$. При последовательной организации скользящих режимов на многообразиях $S_1 = \{\varepsilon_1 = 0\}$, $S_2 = \{\varepsilon_2 = 0 \cap S_1\}$, $S_3 = \{\varepsilon_3 = 0 \cap S_2\}$ амплитуды разрывных управлений выбирают независимо друг от друга в каждом блоке, и поведение переменных иллюстрируется следующей логической цепочкой: $\varepsilon_1 = 0 \Rightarrow \varepsilon_2 = 0 \Rightarrow \varepsilon_3 = 0$, что позволяет последовательно за теоретически конечное время получить оценки переменных состояния z_i , $i = \overline{1, 3}$.

Структурная схема формирования разрывных управляющих воздействий показана на рис. 6.2. Как и прежде, значения эквивалентных управлений получаем с выходов линейных фильтров с малыми постоянными времени.

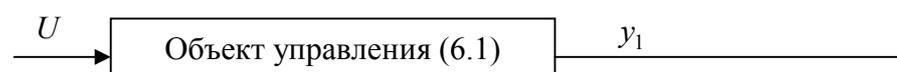


Рис. 6.2. Структурная схема формирования разрывных управляющих воздействий наблюдателя на скользящих режимах

Заметим, что, с одной стороны, при каскадном синтезе наблюдателя состояния на основе метода разделения движений задача оценивания преобразованных переменных вектора состояния решается инвариантно к изменению параметров объекта управления. Выбранная схема формирования управляющих воздействий обеспечивает пошаговую стабилизацию системы в предположении, что коэффициенты $a_1, a_3, a_5 > 0$, а выражения $\|a_1 a_2 \varepsilon_2\|$, $\|\varepsilon_3\|$, $\|h_3(z + \varepsilon) - h_3(z)\|$ ограничены сверху. При синтезе разрывных управляющих воздействий установка дополнительных фильтрующих элементов позволяет получить значения выражения $h_3(x)$. В этом случае для системы (6.5) строится наблюдатель в котором, в отличие от наблюдателя (6.6), последнее уравнение принимает вид: $\dot{z}_3 = v_3$. Соответствующее уравнение относительно невязок запишется следующим образом: $\dot{\varepsilon}_3 = h_3(x) - v_3$. Формирование разрывного управления $v_3 = M_3 \text{sign}(v_{2\text{eq}})$ при выполнении условия $M_3 > \|h_3(x)\|$ обеспечивает возникновение скользящего режима на многообразии $\varepsilon_3 = 0$. Согласно методу эквивалентного управления из соотношения статики $\dot{\varepsilon}_3 = 0$ получим $v_{3\text{eq}} = h_3(x)$. С другой стороны, необходимо отметить, что точное знание параметров системы необходимо для осуществления обратного преобразования координат $Y \rightarrow X$ в том случае, если синтез регулятора осуществляется в терминах исходных переменных x_i , $i = \overline{1, 4}$. Данную проблему можно обойти, если осуществить синтез регулятора в терминах преобразованной системы (6.5) y_i , $i = \overline{1, 3}$.

6.4. Каскадный синтез наблюдателя состояния АД с конечными коэффициентами

В данном разделе предлагается процедура по количественной оценке снизу, позволяющая решить задачу наблюдения с конечными коэффициентами при заданной точности оценивания. С практической точки зрения важно, что в этом случае коэффициенты наблюдателя состояния подчиняются определенной иерархии и могут выбираться на основании неравенств, что существенно облегчает настройку наблюдателя состояния (см. раздел 4.4).

Для решения поставленной задачи приведем блочно-наблюдаемую форму (6.5) к верхнему треугольному виду посредством неособой замены переменных:

$$q_1 = y_1, \quad q_2 = -L_2 y_1 + y_2, \quad q_3 = W_3 y_1 - L_3 y_2 + y_3, \quad (6.8)$$

где $L_2 = \text{diag}(l_2, l_2)$, $L_3 = \text{diag}(l_3, l_3)$ – диагональные матрицы с постоянными коэффициентами, которые будут выбраны позже при синтезе наблюдателя состояния, $W_3 \in R^{2 \times 2}$.

Неособая замена переменных (6.8) приводит систему (6.5) к виду

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= (a_1 a_2 L_2 - a_1 a_5) q_1 + a_1 a_2 q_2, \\ \dot{q}_2 &= D_2 q_1 + (L_3 - a_1 a_2 L_2 - a_3) q_2 + q_3, \\ \dot{q}_3 &= D_3 q_1 - L_3 q_3 + h_3, \end{aligned} \quad (6.9)$$

где $D_2 = a_1 a_5 L_2 + a_3 a_4 - W_3 + L_3 L_2 - a_1 a_2 L_2^2 - a_3 L_2$, $D_3 = L_3 W_3 - a_1 a_5 W_3 - a_3 a_4 L_3$, $W_3 = (-a_3 L_3 + L_3^2)/(a_1 a_2)$.

Для системы (6.9) строится наблюдатель состояния, который имеет структуру, аналогичную (6.9), с вектором состояния $z = \text{col}(z_1, z_2, z_3)$, $\dim q_i = \dim z_i = 2$, $i = \overline{1, 3}$ и управляющими воздействиями $v_1 = (L_1 - a_1 a_5)(q_1 - z_1)$, $v_i = D_i(q_1 - z_1)$, $i = 2, 3$, где $L_1 = \text{diag}(l_1, l_1)$. Тогда относительно невязок $\varepsilon_i = q_i - z_i$, $i = \overline{1, 3}$ можно записать следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= (a_1 a_2 L_2 - L_1) \varepsilon_1 + a_1 a_2 \varepsilon_2, \\ \dot{\varepsilon}_2 &= (L_3 - a_1 a_2 L_2 - a_3) \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\ \dot{\varepsilon}_3 &= -L_3 \varepsilon_3 + h_3(z + \varepsilon) - h_3(z). \end{aligned} \quad (6.10)$$

В соответствии с теоремой 4.3 покажем, что если для системы (6.10) в некоторой открытой ограниченной области $\|\varepsilon\| < F$ выполняется соотношение

$$\|\Delta h_3(\varepsilon)\| = \|h_3(z + \varepsilon) - h_3(z)\| < F_3 = \text{const}, \quad (6.11)$$

то задача оценки переменных q решается с заданной точностью $\|\varepsilon_i\| < \Delta_i$, $i = \overline{1, 3}$ при конечных коэффициентах наблюдателя l_i , $i = \overline{1, 3}$.

Для получения иерархической схемы выбора конечных коэффициентов на основе системы (6.10) исследуем квадратичную форму в виде суммы квадратичных форм:

$$V = \sum_{i=1}^3 V_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i^T \varepsilon_i. \quad (6.12)$$

Покажем, что общую оценку производной \dot{V} квадратичной формы можно получить, оценивая последовательно производные каждого слагаемого выражения (6.12):

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \varepsilon_1^T ((a_1 a_2 L_2 - L_1) \varepsilon_1 + a_1 a_2 \varepsilon_2) \leq (a_1 a_2 l_2 - l_1) \|\varepsilon_1\| \|\varepsilon_1\| + a_1 a_2 \|\varepsilon_1\| \|\varepsilon_2\|, \\ \dot{V}_2 &= \varepsilon_2^T ((L_3 - a_1 a_2 L_2 - a_3) \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \leq (l_3 - a_1 a_2 l_2 - a_3) \|\varepsilon_2\| \|\varepsilon_2\| + \|\varepsilon_2\| \|\varepsilon_3\|, \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\dot{V}_3 = \varepsilon_3^T (-L_3 \varepsilon_3 + h_3(z + \varepsilon) - h_3(z)) \leq -l_3 \|\varepsilon_3\| \|\varepsilon_3\| + \|\varepsilon_3\| F_3.$$

В системе (6.13) производные $\dot{V}_i < 0$, $i = \overline{1, 3}$ отрицательны вне областей

$$\|\varepsilon_1\| \leq \frac{a_1 a_2 \|\varepsilon_2\|}{l_1 - a_1 a_2 l_2} < \Delta_1, \quad \|\varepsilon_2\| \leq \frac{\|\varepsilon_3\|}{a_1 a_2 l_2 + a_3 - l_3} < \Delta_2, \quad \|\varepsilon_3\| \leq \frac{F_3}{l_3} < \Delta_3,$$

откуда следует, что решению задачи оценки компонент системы (6.10) с заданной точностью удовлетворяют следующие неравенства для последовательного выбора коэффициентов наблюдателя состояний:

$$l_1 > \frac{a_1 a_2 F_3}{l_3 (l_2 a_1 a_2 - l_3 + a_3) \Delta_1} + l_2 a_1 a_2, \quad l_2 > \frac{1}{a_1 a_2} \left(\frac{F_3}{l_3 \Delta_2} + l_3 - a_3 \right), \quad l_3 > \frac{F_3}{\Delta_3}. \quad (6.14)$$

При выполнении условий (6.14) квадратичная форма (6.12) является функцией Ляпунова для системы (6.10).

В соответствии с теоремой 4.4 (см. раздел 4.4) покажем, что если для системы (6.10) в некоторой открытой ограниченной области $\|\varepsilon\| < F$ выполняются условия Липшица

$$\|\Delta h_3(\varepsilon)\| = \|h_3(z + \varepsilon) - h_3(z)\| < N_3 \sum_{j=1}^3 \|\varepsilon_j\|, \quad N_3 = \text{const} > 0,$$

то задача обеспечения асимптотической устойчивости системы (6.10) может быть также решена при конечных коэффициентах наблюдателя состояния. В этом случае для квадратичной формы (6.12) справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -((l_1 - a_1 a_2 l_2) \|\varepsilon_1\|^2 + (a_1 a_2 l_2 - l_3 + a_3) \|\varepsilon_2\|^2 + (l_3 - N_3) \|\varepsilon_3\|^2 - \\ & - a_1 a_2 \|\varepsilon_1\| \|\varepsilon_2\| - (1 + N_3) \|\varepsilon_2\| \|\varepsilon_3\| - N_3 \|\varepsilon_1\| \|\varepsilon_3\|). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Выражение (6.15) является квадратичной формой и может быть представлено в виде суммы квадратов: $\dot{V} \leq - \left(\sum_{i=1}^3 (b_i \|\varepsilon_i\|^2 + \sum_{j=1}^2 \left(\frac{N_i}{2} \|\varepsilon_3\| - \|\varepsilon_j\| \right)^2) + \left(\frac{1}{2} \|\varepsilon_2\| - \|\varepsilon_3\| \right)^2 + \left(\frac{a_1 a_2}{2} \|\varepsilon_1\| - \|\varepsilon_2\| \right)^2 \right)$, где

$b_1 = l_1 - a_1 a_2 l_2 - 1 - a_1^2 a_2^2 / 4$, $b_2 = a_1 a_2 l_2 - l_3 + a_3 - 2 - 1/4$, $b_3 = l_3 - N_3 - 1 - N_3^2 / 2$. Производная (6.15) будет отрицательна ($\dot{V} < 0$) при выполнении условий $b_i > 0$, $i = \overline{1, 3}$. Следовательно, значения коэффициентов l_i , $i = \overline{1, 3}$, обеспечивающих асимптотическую устойчивость системы (6.10), могут быть последовательно получены из выражений (6.16) и имеют вид неравенств, в которых также соблюдается иерархический принцип:

$$l_1 > l_2 a_1 a_2 + a_1^2 a_2^2 / 4 + 1, \quad l_2 > (l_3 - a_3 + 2 + 1/4) / (a_1 a_2), \quad l_3 > N_3 + 1 + N_3^2 / 2. \quad (6.16)$$

При выполнении условий (6.16) квадратичная форма (6.12) является функцией Ляпунова для системы (6.10).

Глава 7. КАСКАДНЫЙ СИНТЕЗ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ МАНИПУЛЯТОРОМ С УЧЕТОМ ДИНАМИКИ ИСПОЛНИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ

В данной главе решается задача управления движением манипуляционного робота с жесткими звеньями (механическая подсистема), функционирующего в условиях неопределенности и действия внешних неконтролируемых возмущений. В модели объекта управления учитывается динамика электроприводов постоянного тока (исполнительных устройств) с жестким и эластичным типом сочленений со звеньями манипулятора. При учете динамики исполнительных устройств, во-первых, значительно повышается размерность исходной задачи; во-вторых, внешние возмущения отделяются от управляющих воздействий несколькими интегрирующими звеньями и не могут быть непосредственно компенсированы. Учитывая указанные особенности модели объекта управления, предложен методологически новый (каскадный) подход к решению задачи слежения за заданными траекториями.

Для преодоления проблемы высокой размерности и разделения исходной задачи синтеза на независимо решаемые подзадачи меньшей размерности используется идеология блочного управления. Суть метода состоит в последовательном использовании переменных вектора состояния в качестве фиктивных управлений, что позволяет осуществить алгоритмическую двухуровневую декомпозицию исходной задачи. Задачи синтеза управления в механической подсистеме и в исполнительных устройствах решаются независимо (декомпозиция верхнего уровня). В механической подсистеме решается задача слежения за заданными траекториями. Управляющими воздействиями являются обобщенные силы, развиваемые исполнительными устройствами. В результате появляется возможность непосредственного выбора различных комплектных исполнительных устройств, способных отработать задающее воздействие, а именно, управление, синтезированное в механической подсистеме. В электрических исполнительных устройствах управлением являются напряжения якоря, которые могут быть реализованы в классе разрывных или непрерывных, ограниченных по модулю функций. Следовательно, управление в механической подсистеме может быть реализовано лишь в классе непрерывных функций с ограниченными производными. Последнее утверждение вполне соответствует физическим ограничениям, не допускающим скачкообразного изменения сил и моментов в механических системах. При декомпозициях нижнего уровня задачи синтеза как в механической подсистеме, так и в исполнительных устройствах разделяются на независимо решаемые элементарные подзадачи (блоки), в каждой из которых размерность вектора состояния и управления совпадают. Непосредственное использование блочного синтеза для систем с полной информацией не вызывает трудностей [71], но потребует привлечения особых подходов для объектов, функционирующих в условиях неопределенности и действия внешних, неконтролируемых возмущений, не принадлежащих пространству управления. Для обеспечения инвариантности к таким возмущениям предлагаются процедуры синтеза управления двух типов, организованные по каскадному принципу.

Процедура первого типа, которая отличается простотой вычислительного обеспечения алгоритмов управления, основана на методе разделения движений в классе систем с разрывными управлениями (скользящие режимы) и глубокими обратными связями (большие коэффициенты). Напомним, что к основным достоинствам этих подходов относятся понижение динамического порядка описания замкнутых систем за счет декомпозиции общего движения на быстрые и медленные (скользящие) движения; инвариантность медленных (скользящих) движений к внешним и функциональным неопределенностям; линеаризации нелинейных систем за счет обратной связи. В системах управления механическими объектами с учетом динамики исполнительных устройств (в отличие от систем, в которых динамикой исполнительных устройств можно пренебречь) данные методы непосредственно нереализуемы из-за указанных физических ограничений. В разделе предлагается использовать преимущества метода разделения движений в допредельной ситуации, которая возникает при аппроксимации разрывных управлений с помощью непрерывных функций [76, 77] или при синтезе линейной обратной связи с конечными коэффициентами. Тогда в допредельной ситуации, во-первых,

обеспечивается ε -инвариантность к возмущающим воздействиям [56] и задача слежения решается с заданной точностью. Решение данной задачи для линейных систем разработано в разделе 2.5 и в данной главе распространяется на нелинейную модель электромеханической системы. Во-вторых, если рассматривать влияние исполнительных устройств на механическую подсистему как действие внешних возмущений, то также с заданной точностью сохраняется декомпозиция задач синтеза механической подсистемы и исполнительных устройств и, аналогично, декомпозиция нижнего уровня.

Процедура второго типа связана с использованием комбинированного управления [33], которое, в частности, позволяет непосредственно компенсировать известные (измеряемые) возмущения, принадлежащие пространству управления, решить задачу при наличии только параметрических неопределенностей (адаптивное управление [31, 34, 77]) или в случае, когда внешние возмущения описываются известной динамической моделью с неизвестными начальными условиями (динамическая компенсация). В данной главе предлагается синтезировать комбинированные фиктивные управления с использованием оценок функциональных и внешних возмущений, полученных с помощью наблюдателя возмущений с разрывными управляющими воздействиями. Данный подход, с одной стороны, требует дополнительного расширения пространства состояния замкнутой системы и большего объема вычислений, но, с другой – позволяет компенсировать действие возмущений, обеспечить экспоненциальную сходимость к заданным траекториям и полную двухуровневую декомпозицию процедуры синтеза.

Предполагается, что для измерения доступны положения манипулятора и токи якоря электродвигателей. Оценки неизмеряемых переменных получены с помощью каскадных наблюдателей состояния, методы синтеза которых разработаны в главах 4, 5 применительно к нелинейным системам, функционирующим в условиях неопределенности.

Глава организована следующим образом. В разделе 7.1 приводится описание динамической модели манипулятора с учетом динамики электроприводов постоянного тока с жестким и эластичным типом сочленений. Дается постановка решаемых далее задач. В разделе 7.2 для управления механической подсистемой разработаны два типа каскадных процедур синтеза обобщенных сил, развиваемых исполнительными устройствами, в классе непрерывных функций. В разделе 7.3 для исполнительных устройств разработаны каскадные процедуры синтеза управлений в классе разрывных и непрерывных функций. В разделе 7.4 для информационного обеспечения алгоритмов управления разработаны каскадные процедуры синтеза наблюдателей состояния и возмущений с разрывными управляющими воздействиями. В разделе 7.5 в качестве иллюстрации разработанных алгоритмов приведены процедуры синтеза обратной связи и результаты моделирования на ПК для системы управления положением маятника, функционирующей в условиях неопределенности.

7.1. Описание объекта управления. Постановка задач

Рассматривается математическая модель электромеханического объекта управления вида

$$\dot{q}_1 = q_2, \quad \dot{q}_2 = H^{-1}(q_1)[\tau - C(q_1, q_2)q_2 - G(q_1) + \eta(t)]; \quad (7.1)$$

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad J\dot{\omega} = M_m - M_c, \quad M_m = \Psi i, \quad Li = -Ri - \Psi\omega + u. \quad (7.2)$$

Уравнениями (7.1) описывается динамическая модель манипулятора [12, 78, 82], представленная в нормальной форме Коши (механическая подсистема). Уравнениями (7.2) описывается динамическая модель электроприводов постоянного тока [51] (исполнительные устройства).

В модели механической подсистемы (7.1), которая имеет n степеней свободы, приняты следующие обозначения: $q_1 \in R^n$ – вектор угловых положений манипулятора, $\tau \in R^n$ – век-

тор обобщенных сил, развиваемых исполнительными устройствами, $H(q_1) \in R^{n \times n}$ – положительно-определенная нелинейная симметрическая матрица инерции, $C(q_1, q_2) \in R^{n \times n}$ – матрица центробежных и кориолисовых сил, $G(q_1) \in R^n$ – вектор гравитационных сил. Требования к степени определенности матриц $H(q_1)$, $C(q_1, q_2)$, $G(q_1)$ формулируются по ходу изложения.

Вектор $\eta(t) \in R^n$ – часть обобщенных сил, трактуемых как внешние, неконтролируемые, ограниченные в некоторой норме возмущения:

$$\|\eta(t)\| \leq \Phi, \quad (7.3)$$

где Φ – известная константа. Для простоты изложения покомпонентные ограничения векторов и вектор-функций в работе не используются.

В модели исполнительных устройств (7.2) приняты следующие обозначения: $\varphi, \omega, i, u \in R^n$ – векторы положения исполнительных устройств, угловой скорости ротора, тока цепи якоря, напряжения якоря. $R, L, J, \Psi^*, A, \Psi \in R^{n \times n}$ – известные диагональные матрицы с положительными коэффициентами, описывающие активное сопротивление цепи якоря, индуктивность цепи якоря, приведенный момент инерции на валу двигателя, поток возбуждения и конструктивные коэффициенты соответственно; $\Psi = A\Psi^*$, M_c – момент нагрузки; M_m – электрический момент.

Далее будут рассмотрены случаи жестких и эластичных сочленений приводов со звеньями манипуляторов. В зависимости от типа сочленений количество динамических уравнений электроприводов, учитываемых в модели объекта управления, может быть различным. При жестком типе сочленений в качестве обобщенных сил, развиваемых исполнительными устройствами, принимаем электрические моменты

$$\tau = A_\tau M_m = A_\tau \Psi i. \quad (7.4)$$

Будем полагать, что компоненты вектора положения и скорости манипулятора пропорциональны соответствующим компонентам вектора положения и скорости электропривода $q_1 = A_\varphi \varphi$, $q_2 = A_\omega \omega$, где $A_\tau, A_\varphi, A_\omega \in R^{n \times n}$ – известные диагональные матрицы с положительными, постоянными коэффициентами передачи. В этом случае из рассмотрения можно исключить два первых уравнения системы (7.2), и учитываемую динамику исполнительных устройств опишем следующим уравнением относительно τ :

$$\dot{\tau} = -RL^{-1}\tau - A_0\Psi\omega + A_0u = -RL^{-1}\tau - A_0\Psi A_\omega^{-1}q_2 + A_0u, \quad (7.5)$$

где $A_0 = A_\tau\Psi L^{-1}$.

При эластичном типе сочленений в качестве обобщенных сил, развиваемых исполнительными устройствами, принимаем невязки по угловым положениям звеньев манипулятора и приводов:

$$\tau = K(\varphi - q_1) = M_c, \quad (7.6)$$

где $K \in R^{n \times n}$ – известная диагональная матрица постоянных коэффициентов жесткости электроприводов. С учетом выражения (7.6) динамическая модель исполнительных устройств (7.2) принимает вид

$$\dot{\tau} = K(\omega - q_2), \quad J\dot{\omega} = \Psi i - \tau, \quad Li = -Ri - \Psi\omega + u. \quad (7.7)$$

Таким образом, совместное движение манипулятора и его исполнительных устройств описывают системы уравнений (7.1), (7.5) с вектором состояния $\text{col}(q_1, q_2, \tau)$ размерности $3n$ или системы (7.1), (7.7) с вектором состояния $\text{col}(q_1, q_2, \tau, \omega, i)$ размерности $5n$. Управляющим воздействием является вектор напряжений якоря u ,

$$\|u\| \leq U, \quad (7.8)$$

где U – известная константа. Неравенство (7.8) выражает ограниченность ресурсов управления. Класс допустимых управлений – разрывные или непрерывные функции, удовлетворяющие (7.8). Вектор измеряемых переменных $\text{col}(q_1, i)$ размерности $2n$ составляют положения манипулятора и токи якоря электроприводов.

Вектор $g(t) \in R^n$, который состоит из известных гладких функций времени, ограниченных вместе с первыми производными

$$\|g^{(j)}(t)\| \leq G_j = \text{const}, \quad j = 0, 1, \quad (7.9)$$

полагается задающим воздействием по положению манипулятора.

Замечание 7.1. В общем случае компоненты вектора $g(t)$, определяющего заданные траектории обобщенных координат манипулятора, могут быть негладкими функциями (например, при скачкообразном задающем воздействии). Желание остаться в классе моделей, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, приводит к необходимости предварительного сглаживания таких задающих воздействий посредством фильтра третьего (а при необходимости и пятого) порядка с малыми постоянными времени μ_{gj} , $j = 1, 3$:

$$\mu_{g1}\ddot{\tilde{g}}_j = -\tilde{g}_j + \tilde{g}_{j+1}, \quad j = 1, 2; \quad \mu_{g3}\ddot{\tilde{g}}_3 = -\tilde{g}_3 + g.$$

Тогда в формировании управления будут задействованы переменные фильтра $\tilde{g}_1 \rightarrow g$, $\tilde{g}_2 \rightarrow \dot{g}$, $\tilde{g}_3 \rightarrow \ddot{g}$, значения которых ограничены (7.9).

Ставится задача стабилизации переменной $e_1 \in R^n$, которой обозначено отклонение от заданных траекторий:

$$e_1(t) = q_1(t) - g(t). \quad (7.10)$$

Структурная схема разомкнутой системы управления (7.1), (7.7) представлена на рис. 7.1.

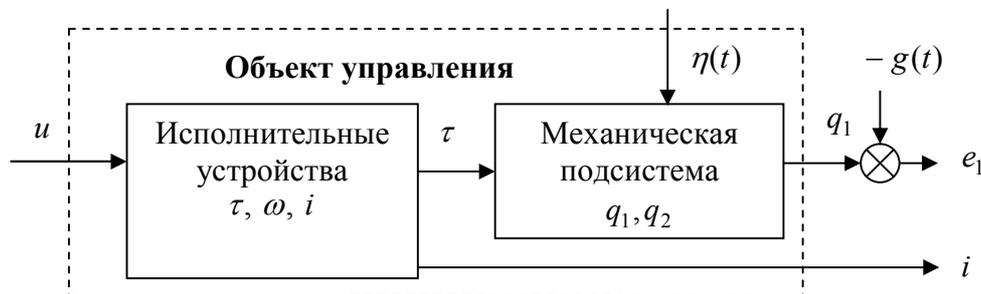


Рис.7.1. Структурная схема разомкнутой системы управления

На схеме отражены особенности объекта управления, с которыми связана нетривиальность задачи синтеза обратной связи, а именно:

- высокая размерность модели объекта управления;
- наличие внешних, изменяющихся во времени возмущений, которые отделены от управления несколькими интегрирующими звеньями;
- отсутствие информации о части переменных вектора состояния.

Для решения перечисленных проблем ставятся следующие задачи:

1) разработка каскадной процедуры синтеза управления (регулятора) с использованием допредельных свойств систем с большими коэффициентами и нахождение нижних оценок допредельных констант (коэффициентов линейной обратной связи), при которых задача слежения решается с заданной точностью

$$\|e_1(t)\| \leq \delta_1 = \text{const}, \quad (7.11)$$

обеспечивается ε -инвариантность к возмущениям (7.3) и допредельная двухуровневая декомпозиция задачи синтеза;

2) разработка каскадной процедуры синтеза с использованием принципа комбинированного управления, в результате которой обеспечиваются: экспоненциальная сходимость к заданным траекториям

$$e_1(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty, \quad (7.12)$$

компенсация действия возмущений, полная двухуровневая декомпозиция задачи синтеза. Данная задача решается при дополнительных предположениях об ограниченности производных возмущающих и задающих воздействий:

$$\|\eta^{(j)}(t)\| \leq \Phi_j = \text{const}, \quad j = \overline{1, 3}; \quad \|g^{(j)}(t)\| \leq G_j = \text{const}, \quad j = \overline{2, 5}; \quad (7.13)$$

3) разработка каскадной процедуры синтеза наблюдателя состояния на основе метода разделения движений в классе систем с разрывными управлениями для получения оценок переменных $\tilde{q}_2, \tilde{\tau}, \tilde{\omega}$, по измерениям q_1, i . Использование данного подхода позволяет разделить задачу наблюдения на независимо решаемые подзадачи меньшей размерности и обеспечить сходимость переменных состояния наблюдателя к переменным состояния объекта управления за конечное время. Последнее обстоятельство позволяет не учитывать рассогласования $q_2 - \tilde{q}_2, \tau - \tilde{\tau}, \omega - \tilde{\omega}$ при синтезе регулятора. Кроме того, данное устройство позволит получить динамические оценки возмущений $\tilde{\eta}(t)$, необходимых для решения задачи (7.12);

4) разработка каскадной процедуры синтеза наблюдателя возмущений в классе систем с разрывными управлениями, который по полученным оценкам $\tilde{\eta}(t)$ позволяет за конечное время получить оценки производных возмущений (в общем случае до третьего порядка $\hat{\eta}^{(1)}, \hat{\eta}^{(2)}, \hat{\eta}^{(3)}$). Заметим, что функциональные неопределенности и производные нелинейных составляющих оператора объекта управления, вычисление которых трудоемко, можно трактовать как внешние возмущения и оценить с помощью данного устройства.

С учетом перечисленных задач построена структурная схема замкнутой системы (см. рис. 7.2). При решении задачи (7.11) наблюдатель возмущений на схеме отсутствует.

В разделах 7.2–7.3 разработаны базовые алгоритмы управления в предположении, что информация о неизвестных переменных вектора состояния и возмущающих воздействий (и их производных), используемых для формирования управляющих воздействий, получена с помощью наблюдателей состояния и возмущений.

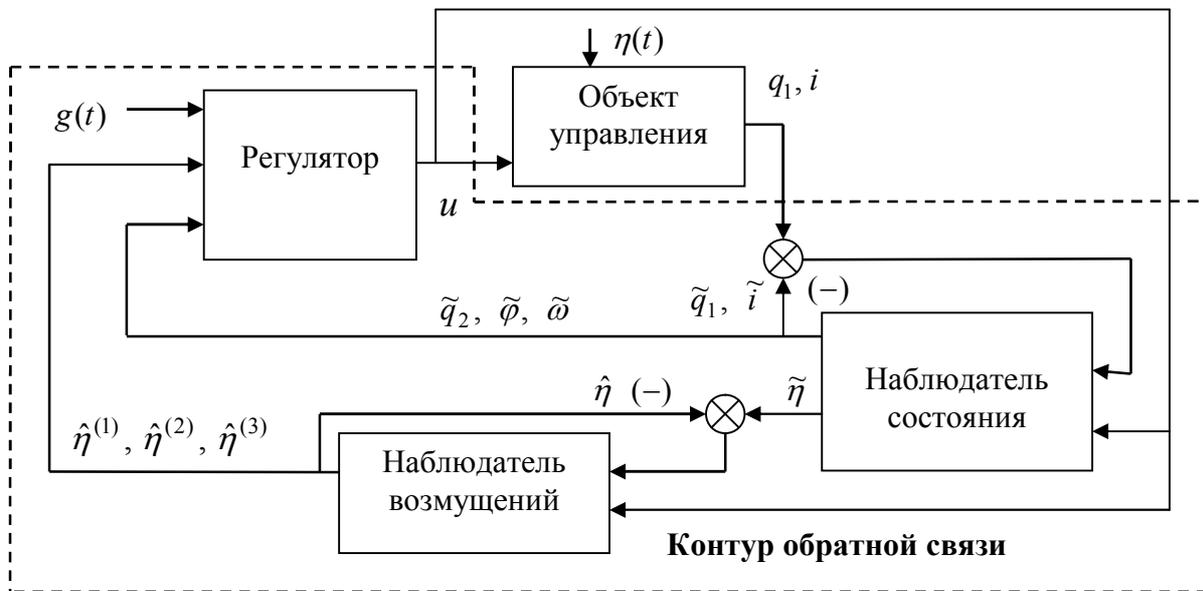


Рис.7.2. Структурная схема замкнутой системы управления

7.2. Синтез управления в механической подсистеме

В данном разделе решаются задачи синтеза управляющих воздействий в механической подсистеме (7.1), модель которой описывается нелинейной системой размерности $2n$, функционирующей в условиях неопределенности и действия внешних возмущений. В качестве управления полагаются обобщенные силы, развиваемые исполнительными устройствами τ , выбираемые в классе непрерывных, ограниченных функций. Цель управления – обеспечить движение механической подсистемы (7.1) по заданным траекториям (7.9). Для декомпозиции процедуры синтеза управления использован блочный подход, в соответствии с которым модель объекта управления (7.1) приводится к блочно-управляемой форме, состоящей из двух блоков размерности n , в каждом из которых размерности вектора состояния и управления совпадают и независимо решаются элементарные задачи синтеза. Для обеспечения соотношения (7.11) используются допредельные свойства систем с большими коэффициентами. Применительно к линейным моделям объекта управления соответствующая процедура разработана в разделе 5.4 и в данном параграфе распространяется на нелинейную модель манипуляционного робота. Для обеспечения соотношения (7.12) используется принцип комбинированного управления.

7.2.1. Синтез управления на основе метода разделения движений

Введем неособые замены переменных

$$e_2 = K_1 e_1 + q_2, \quad (7.14)$$

$$e_3 = \tau - \tau^*, \quad (7.15)$$

где $e_2 \in R^n$, $e_3 \in R^n$ – рассогласование между реальными τ и синтезируемыми $\tau^* \in R^n$ обобщенными силами; матрицы коэффициентов обратной связи типа $K_1 \in R^{n \times n}$, подлежащие определению, здесь и далее для простоты изложения будем полагать диагональными с

постоянными положительными одинаковыми коэффициентами $K_1 = \text{diag}(k_{1j})$,
 $k_{1j} = k_1 = \text{const} > 0$, $j = \overline{1, n}$.

Представим систему (7.1) относительно переменных e_1 (7.10), e_2 (7.14) с учетом (7.15) в виде двух блоков:

$$\dot{e}_1 = -K_1 e_1 + e_2 - \dot{g}, \quad (7.16)$$

$$\dot{e}_2 = H^{-1}[\tau^* + e_3 + \eta - C e_2 + Y], \quad (7.17)$$

$$Y = C K_1 e_1 - G + H K_1 (e_2 - K_1 e_1 - \dot{g}). \quad (7.18)$$

Выберем управляющее воздействие в блоке (7.17) в виде линейной функции

$$\tau^* = -K_2 e_2, \quad (7.19)$$

где $K_2 = \text{diag}(k_{2j})$, $k_{2j} = k_2 = \text{const} > 0$, $j = \overline{1, n}$.

Задача синтеза управления в механической подсистеме сводится к последовательному нахождению нижних оценок коэффициентов k_1 , k_2 , при которых обеспечивается: движение в заданной окрестности желаемых траекторий (7.11); допредельная декомпозиция процедуры синтеза в замкнутой системе (7.16)–(7.19); ε -инвариантность к внешним ограниченным возмущениям, в качестве которых в блоке (7.16) полагаются $\dot{g}(t)$, в блоке (7.17) – $\eta(t)$, e_3 . Для решения поставленных задач найдем достаточные условия устойчивости замкнутой системы (7.16)–(7.19) с помощью второго метода Ляпунова. При анализе квадратичной формы

$$V_q = V_1 + V_2 = (1/2)e_1^T e_1 + (1/2)e_2^T H e_2 \quad (7.20)$$

также используем каскадный принцип.

Шаг 1. Для производной первого слагаемого квадратичной формы (7.20) в силу (7.16), (7.9) справедлива следующая оценка: $\dot{V}_1 = e_1^T (e_2 - K_1 e_1 - \dot{g}) \leq \|e_1\|(\|e_2\| - k_1 \|e_1\| + G_1)$. Неравенство $\dot{V}_1 < 0$ обеспечивается вне окрестности

$$\|e_1\| \leq (\|e_2\| + G_1) / k_1 \leq \delta_1 \quad (7.21)$$

при выполнении условий

$$k_{1f} > G_1 / \delta_1, \quad k_{1e} > \|e_2\| / \delta_1, \quad k_1 = k_{1f} + k_{1e}. \quad (7.22)$$

Первое неравенство (7.22) является нижней оценкой для выбора $k_{1f} = k_{1f}^*$. Из второго при фиксированном значении $k_{1e} = k_{1e}^*$ определяется точность, которую требуется обеспечить в блоке (7.17) при стабилизации переменной e_2 (или точность декомпозиции процедуры синтеза в механической подсистеме):

$$\|e_2\| < k_{1e}^* \delta_1 = \delta_2 = \text{const}. \quad (7.23)$$

При выборе коэффициентов обратной связи следует учитывать, что с ростом $k_1^* = k_{1f}^* + k_{1e}^*$ естественным образом увеличиваются точность обработки задания (7.11) (в предельном слу-

чае $k_1^* \rightarrow \infty \Rightarrow \delta_1 \rightarrow 0$ [30]) и темпы переходного процесса. В то же время наличие условия (7.8) подразумевает, что существует верхняя граница $k_1 \leq k_{1\max}$ и соответствующая ей максимально возможная точность слежения $\delta_1 \leq \delta_{1\max}$.

Шаг 2. Для второго слагаемого производной квадратичной формы (7.20) в силу (7.3), (7.17), (7.19), (7.21), свойства механических объектов [77]

$$e_2^T [(1/2)\dot{H} - C]e_2 \equiv 0, \quad (7.24)$$

и в случае выполнения для выражения (7.18) неравенства

$$\|Y\| \leq L_0 + L_1\|e_1\| + L_2\|e_2\|, \quad L_j(k_1^*) = \text{const} > 0, \quad j = \overline{0, 2}, \quad (7.25)$$

которое следует из предположения $\|H\| \leq \bar{H}$, $\|C\| \leq \bar{C}$, $\|G\| \leq \bar{G}$, справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= e_2^T H \dot{e}_2 + \frac{1}{2} e_2^T \dot{H} e_2 = e_2^T (-K_2 e_2 + e_3 + \eta + Y) + e_2^T [(1/2)\dot{H} - C]e_2 \leq \\ &\leq \|e_2\| [-k_2 \|e_2\| + \|e_3\| + \Phi + L_0 + L_1\|e_1\| + L_2\|e_2\|] \leq \\ &\leq \|e_2\| [-k_2 \|e_2\| + \|e_3\| + \Phi + L_0 + L_1(\|e_2\| + G_1)/k_1^* + L_2\|e_2\|]. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Неравенство $\dot{V}_2 < 0$ обеспечивается вне окрестности

$$\|e_2\| \leq (L_0 + \Phi + L_1 G_1 / k_1^* + \|e_3\|) / (k_2 - L_1 / k_1^* - L_2) \leq \delta_2$$

при выполнении условий

$$k_{2f} > L_1 / k_1^* + L_2 + (L_0 + \Phi + L_1 G_1 / k_1^*) / k_{1e}^* \delta_1, \quad k_{2e} > \|e_3\| / (k_1^* \delta_1), \quad k_2 = k_{2f} + k_{2e}. \quad (7.27)$$

Первое неравенство (7.27) является нижней оценкой для выбора $k_{2f} = k_{2f}^*$. Из второго при фиксированном значении $k_{2e} = k_{2e}^*$ определяется точность, которую требуется обеспечить при стабилизации переменной e_3 (или точность декомпозиции верхнего уровня):

$$\|e_3\| < k_{2e}^* k_{1e}^* \delta_1 = \delta_3 = \text{const}. \quad (7.28)$$

7.2.2. Синтез комбинированного управления

Рассмотрим пошаговую процедуру синтеза комбинированных управлений в механической подсистеме (7.1), которые обеспечивают экспоненциальную сходимость к заданным траекториям (7.12), компенсацию возмущений $\eta(t)$ и полную декомпозицию процедуры синтеза управления в механической подсистеме.

Шаг 1. В первом уравнении системы (7.1), записанном относительно отклонений (7.10) $\dot{e}_1 = q_2 - \dot{g}$, положим переменную q_2 в качестве комбинированного управляющего воздействия вида

$$q_2 = -K_1 e_1 + \dot{g}, \quad (7.29)$$

где выбор коэффициентов матрицы $K_1 = K_1^* = \text{const} > 0$ определяет темпы экспоненциальной сходимости (7.12) в замкнутой системе

$$\dot{e}_1 = -K_1^* e_1. \quad (7.30)$$

Шаг 2. На втором шаге задача управления заключается в обеспечении соотношений (7.29)–(7.30) посредством стабилизации переменной

$$e_2 = q_2 - \dot{g} + K_1 e_1, \quad (7.31)$$

$$e_2 \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty. \quad (7.32)$$

Дифференциальное уравнение относительно переменной e_2 (7.31) с учетом (7.1), (7.30) принимает вид

$$\dot{e}_2 = H^{-1}[\tau + \eta - C e_2 + Y], \quad Y = C(K_1^* e_1 - \dot{g}) - G - H(\ddot{g} + K_1^{*2} e_1). \quad (7.33)$$

Предположив, что второе выражение (7.33) априорно известно, синтезируем комбинированное управление в виде суммы линейного (7.19) и компенсирующих слагаемых:

$$\tau = \tau^* = -K_2 e_2 - Y - \eta. \quad (7.34)$$

Для замкнутой системы (7.33)–(7.34) $\dot{e}_2 = H^{-1}[-K_2 e_2 - C e_2]$ производная второго слагаемого квадратичной формы (7.20) с учетом (7.24) отрицательна $\dot{V}_2 = -e_2^T K_2 e_2 + e_2^T [(1/2)\dot{H} - C]e_2 = -e_2^T K_2 e_2 \leq 0$ при любых $K_2 = K_2^* = \text{const} > 0$.

Как правило, на практике в механических системах имеется неполная информация об операторе объекта управления. Рассмотрим случай, когда второе уравнение подсистемы (7.1) можно представить в виде

$$\dot{q}_2 = H_0^{-1}(q_1)[\tau - C_0(q_1, q_2)q_2 - G_0(q_1) + f(q_1, q_2, t)], \quad (7.35)$$

где $H_0(q_1)$, $C_0(q_1, q_2)$, $G_0(q_1)$ – функционально и параметрически определенные матрицы, $f(q_1, q_2, t) \in R^n$ – вектор функциональных неопределенностей и внешних возмущений, который предполагается ограниченным вместе со своими производными до третьего порядка:

$$\|f^{(j)}(q_1, q_2, t)\| \leq F_j, \quad j = \overline{0, 3}, \quad (7.36)$$

где F_j – известные константы. С учетом (7.35) дифференциальное уравнение относительно переменной e_2 (7.31) принимает вид

$$\dot{e}_2 = H_0^{-1}[\tau + f(q_1, q_2, t) + Y], \quad (7.37)$$

$$Y = -C_0(e_2 + \dot{g} - K_1^* e_1) - G_0 - H_0(\ddot{g} + K_1^{*2} e_1). \quad (7.38)$$

Синтезируем комбинированное управление вида

$$\tau = \tau^* = -H_0 K_2 e_2 - f(q_1, q_2, t) - Y, \quad (7.39)$$

которое линеаризует замкнутую систему (7.37)–(7.39)

$$\dot{e}_2 = -K_2 e_2 \quad (7.40)$$

и обеспечивает соотношение (7.32) при любых $K_2 = K_2^* = \text{const} > 0$.

Для обеспечения соотношений (7.34) и (7.39) требуется обеспечить экспоненциальную устойчивость переменной

$$e_3 \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty. \quad (7.41)$$

Замечание 7.2. Рассмотрим случай совместного использования допредельных свойств систем с большими коэффициентами и комбинированного управления. В качестве примера рассмотрим блок (7.17) в предположении, что выражение (7.18) можно представить в виде суммы $Y = Y_0 + Y_f$, где первое слагаемое Y_0 известно, а второе Y_f полагается неизвестным, но ограниченным

$$\|Y_f\| \leq L_{f0} + L_{f1}\|e_1\| + L_{f2}\|e_2\|, \quad (7.42)$$

где $L_j > L_{fj}(k_1^*) = \text{const} > 0$, $j = \overline{0, 2}$. Тогда появляется возможность компенсировать известные компоненты с помощью управления вида:

$$\tau^* = -K_2 e_2 - Y_0. \quad (7.43)$$

Для замкнутой системы (7.17), (7.43) $\dot{e}_2 = H^{-1}[-K_2 e_2 + e_3 + \eta - C e_2 + Y_f]$ анализ производной квадратичной формы (7.26) с учетом (7.42) показывает, что заданную точность (7.11) можно обеспечить при меньшем коэффициенте обратной связи, поскольку нижняя оценка k_{2f} в этом случае меньше, чем оценка (7.27) при управлении (7.19).

Выбранные в механической подсистеме управления полагаются задающими воздействиями для исполнительных устройств (7.5), (7.7), в которых также решается задача слежения с обеспечением: заданной точности (7.28) при отработке управлений (7.19) или (7.43); экспоненциальной сходимости (7.41) при отработке управлений (7.34) или (7.39). В следующем параграфе описанные каскадные процедуры аналогичным образом повторяются для синтеза управления u . Для алгоритмов (7.19) и (7.43); (7.39) и (7.34) принцип построения процедур одинаков. В дальнейшем изложении будем рассматривать только варианты (7.19), (7.39), которые представляют больший интерес с практической точки зрения.

В заключение данного раздела проведем сравнительный анализ предложенных методов синтеза. Использование допредельных свойств систем с большими коэффициентами позволяет синтезировать простой линейный (в терминах преобразованных переменных) алгоритм управления (7.19), который не требует полной информации об операторе объекта управления (7.1), вычисления первой производной задания $\dot{g}(t)$ и оценивания внешних возмущений $\eta(t)$. В данном случае расширяется класс допустимых задающих и возмущающих воздействий, поскольку $\dot{g}(t)$ и $\eta(t)$ должны удовлетворять условиям (7.9) и (7.3) соответственно, и обычные предположения о гладкости производных задания и внешних возмущений [71, 82] не требуются. Ценой перечисленных преимуществ является решение задачи слежения с заданной точностью (7.11).

Использование принципа комбинированного управления позволяет обеспечить экспо-

ненциальную сходимость к заданным траекториям (7.12). В то же время для синтеза алгоритма (7.39), который значительно сложнее в реализации, требуется вычисление $\dot{g}(t)$, $\ddot{g}(t)$ и оценивание $f(q_1, q_2, t)$, что приводит к расширению пространства состояний замкнутой системы. В данном случае сужается класс допустимых задающих и возмущающих воздействий, поскольку вводятся дополнительные ограничения (7.26), (7.23).

7.3. Синтез управления в исполнительных устройствах

В данном разделе решаются задачи синтеза управляющих воздействий в исполнительных устройствах, динамические модели которых описываются линейными уравнениями (7.5) или (7.7) с известными параметрами. Рассмотрены случаи выбора управления (напряжений якоря u) в классах разрывных и непрерывных функций, удовлетворяющих условиям (7.8). В электрических исполнительных устройствах [51], управляемых инверторами напряжения, которые могут функционировать исключительно в ключевом режиме, естественно использовать алгоритмы, заранее ориентированные на разрывной характер управляющих воздействий. В случае использования электрических исполнительных устройств с системами импульсно-фазового управления (СИФУ), задающие воздействия которых имеют непрерывный характер, класс управляющих воздействий u также составляют непрерывные функции.

В качестве задающего воздействия для исполнительных устройств полагаются выбранные управления механической подсистемы τ^* (7.19) и (7.39). Задача управления в исполнительных устройствах сводится к задаче стабилизации переменной e_3 (7.15) с обеспечением соотношений (7.28) и (7.41) для алгоритмов (7.19) и (7.39) соответственно.

Задача синтеза управления u при жестком типе сочленений (7.4) не вызывает трудностей, поскольку уравнение (7.5) описывается элементарным (с точки зрения решения задачи стабилизации) блоком размерности n относительно рассогласования e_3 (7.15). Показано, что синтез непрерывных алгоритмов управления обеспечивает отработку заданий (7.19) с определенной точностью (7.28) в предположении, что первые производные (7.19) $\dot{\tau}^* = -K_2^* H^{-1} [e_3 - K_2^* e_2 + \eta - C e_2 + Y]$ являются неизвестными ограниченными функциями

$$\|\dot{\tau}^*\| \leq T_1, \quad (7.44)$$

где T_1 – известная константа. Экспоненциальная сходимость (7.41) к задающим воздействиям (7.39) обеспечивается посредством непрерывного комбинированного управления. При синтезе разрывных алгоритмов управления в предположении (7.44) обеспечивается точная отработка задающих воздействий (7.19), (7.39) за конечное время.

Задача синтеза управления u при эластичном типе сочленений (7.6) решается применительно к системе (7.7) размерности $3n$. Как и в разделе 7.2, для декомпозиции процедуры синтеза управления используется блочный подход, в соответствии с которым система (7.7) приводится к блочно-управляемым формам, состоящим из трех элементарных блоков размерности n . На основе полученных форм разработаны:

1) каскадная процедура синтеза с использованием допредельных свойств систем с большими коэффициентами, в результате которой при выполнении ограничений (7.44) с определенной точностью (7.28) обеспечивается отработка задающих воздействий (7.19);

2) каскадная процедура синтеза комбинированных управлений, в результате которой обеспечивается экспоненциальная сходимость (7.41) к задающим воздействиям (7.39) при выполнении дополнительных ограничений

$$\|\tau^{*(j)}\| \leq T_j = \text{const}, \quad j = 2, 3. \quad (7.45)$$

7.3.1. Синтез управления при жестком типе сочленений

Представим уравнение (7.5) относительно рассогласования e_3 (7.15):

$$\dot{e}_3 = \dot{\tau} - \dot{\tau}^* = -RL^{-1}e_3 + \phi + A_0u, \quad (7.46)$$

где $RL^{-1} > 0$, $\det(A_0) \neq 0$, вектор-функция $\phi \in R^n$ обозначает

$$\phi = -RL^{-1}\tau^* - A_0\Psi A_\omega^{-1}(e_2 - K_1^*e_1) - \dot{\tau}^*, \quad (7.47)$$

$$\phi = -RL^{-1}\tau^* - A_0\Psi A_\omega^{-1}(e_2 - K_1^*e_1 + \dot{g}) - \dot{\tau}^* \quad (7.48)$$

при замене переменных (7.14) и (7.31) соответственно. С учетом ограничений (7.9), (7.44) полагаем, что

$$\|\phi\| \leq \bar{\phi}(k_1^*, k_2^*) = \text{const} > 0. \quad (7.49)$$

Синтез непрерывного управления.

1) В соответствии с методом разделения движений в классе систем с большими коэффициентами, выберем управляющее воздействие в системе (7.46)–(7.47) в виде линейной функции

$$u = -A_0^{-1}K_3e_3, \quad (7.50)$$

где $K_3 = \text{diag}(k_{3_j})$, $k_{3_j} = k_3 = \text{const} > 0$, $j = \overline{1, n}$.

В замкнутой системе (7.46), (7.50) ставится задача определения нижней оценки коэффициента k_3 , при которой обеспечиваются: отработка задания (7.19) с точностью (7.28); допредельная декомпозиция верхнего уровня; ε -инвариантность к внешним возмущениям, в качестве которых полагается вектор ϕ (7.47). Для решения поставленных задач найдем достаточные условия замкнутой системы (7.46), (7.50) с помощью второго метода Ляпунова. Для производной квадратичной формы $V_\tau = (1/2)e_3^T e_3$ в силу (7.49) справедлива следующая оценка: $\dot{V}_\tau = e_3^T \dot{e}_3 = e_3^T (-k_3e_3 - (RL^{-1})e_3 + \phi) \leq \|e_3\|(-k_3 + \|RL^{-1}\|)\|e_3\| + \bar{\phi}$. Неравенство

$\dot{V}_\tau < 0$ обеспечивается вне окрестности $\|e_3\| \leq \bar{\phi}/(k_3 + \|RL^{-1}\|) \leq \delta_3$ при выполнении условия

$$k_3 > \bar{\phi}/(k_{2e}^*k_{1e}^*\delta_1) - \|RL^{-1}\|. \quad (7.51)$$

Неравенство (7.51) является нижней оценкой для выбора коэффициента обратной связи. Из условия (7.8) определяется верхняя оценка:

$$k_3 \leq U/\|A_0^{-1}e_3\|. \quad (7.52)$$

Если существует такое значение $k_3 = k_3^*$, которое одновременно удовлетворяет условиям (7.51) и (7.52), то поставленная задача считается выполненной.

2) В соответствии с принципом комбинированного управления для обеспечения экспо-

нениальной сходимости (7.41) к заданию (7.39) и полной декомпозиции верхнего уровня выберем в системе (7.46), (7.48) управляющее воздействие вида

$$u = -A_0^{-1}K_3e_3 - \phi, \quad (7.53)$$

которое линеаризует замкнутую систему (7.46): $\dot{e}_3 = -K_3e_3 - RL^{-1}e_3$. Если существует такое значение $k_3 = k_3^*$, которое одновременно удовлетворяет условиям $k_3 > 0$ (нижняя оценка) и $k_3 \leq (U - \bar{\phi}) / \|A_0^{-1}e_3\|$ (верхняя оценка), то поставленная задача считается выполненной. Для реализации алгоритма (7.53), в отличие от алгоритма (7.50), потребуется вычисление $g^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, 3}$, $H_0^{(j)}(q_1)$, $C_0^{(j)}(q_1, q_2)$, $G_0^{(j)}(q_1)$, $j = 0, 1$ и получение оценок $f^{(j)}(q_1, q_2, t)$, $j = 0, 1$.

3) Для одновременного использования допредельных свойств систем с большими коэффициентами и комбинированного управления представим выражение (7.47) в виде суммы двух слагаемых $\phi = \phi_0 + \phi_f$, где $\phi_0 = -RL^{-1}\tau^* - A_0\Psi A_\omega^{-1}(e_2 - K_1^*e_1)$ известно, а $\phi_f = -\dot{\tau}^*$ неизвестно, но ограничено $\|\phi_f\| \leq T_1 < \bar{\phi}$. В замкнутой системе (7.46), $u = -A_0^{-1}K_3e_3 - \phi_0$ диапазон для выбора коэффициента обратной связи определяется неравенствами $T_1/k_{2e}^*k_{1e}^*\delta_1 - \|RL^{-1}\| < k_3 \leq (U - \bar{\phi}_0) / \|A_0^{-1}e_3\|$.

Синтез разрывных алгоритмов управления.

Сформируем разрывное управляющее воздействие:

$$u = -A_0^{-1}M\text{sign}e_3 \quad (7.54)$$

с постоянной амплитудой

$$M = \text{diag}(m_j), \quad m_j = m = \text{const} > 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (7.55)$$

которое за конечное время обеспечивает стабилизацию замкнутой системы (7.46), (7.54) $\dot{e}_3 = -RL^{-1}e_3 + \phi - M\text{sign}e_3$ посредством организации скользящих движений по многообразию $e_3 = 0$ при выполнении условий существования скользящих режимов $e_3^T \dot{e}_3 < 0 \Rightarrow m + \|RL^{-1}\| > \bar{\phi}$, из которых определяется нижняя оценка для выбора амплитуды (7.55):

$$m > \bar{\phi} - \|RL^{-1}\|. \quad (7.56)$$

Из условия (7.8) определяется верхняя оценка:

$$m \leq U \|A_0\|. \quad (7.57)$$

Если существует такое значение $m = m^*$, которое одновременно удовлетворяет условиям (7.56)–(7.57), то поставленная задача считается выполненной. Синтез разрывного управления (7.54) обеспечивает точную отработку заданий (7.19), (7.39) и полную декомпозицию верхне-

го уровня за конечное время. В отличие от алгоритма (7.53) для реализации управления (7.54) не требуется вычислять производные $\ddot{g}(t)$, $\dot{H}_0(q_1)$, $\dot{C}_0(q_1, q_2)$, $\dot{G}_0(q_1)$, $\dot{f}(q_1, q_2, t)$.

Замечание 7.3. Использование разрывных управлений (7.54) может привести к автоколебаниям и, следовательно, к неидеальному скользящему режиму из-за пренебрежения в модели объекта управления малыми динамическими неидеальностями. Замыкание обратной связи через наблюдатель состояния (см. рис.7.2) способствует повышению частоты переключения разрывных управлений, поскольку быстрые движения сосредоточиваются в контуре обратной связи, не возбуждая неучтенных малых динамик объекта управления. Еще один способ приближения реального скользящего режима к теоретическому используется в случае, когда существует аппаратная возможность реализовать разрывное управление с амплитудой $M = M_0 + M_e(e)$, в которую аддитивно входит переменный компонент $M_e(e)$, $e = \text{col}(e_1, e_2, e_3)$, стремящийся к нулю при стремлении к нулю невязок $e \rightarrow 0 \Rightarrow M_e(e) \rightarrow 0$. С уменьшением $M_e(e)$ уменьшаются и автоколебания в установившемся режиме.

7.3.2. Синтез управления при эластичном типе сочленений

Синтез управления на основе метода разделения движений.

Первая процедура неособых замен переменных, описанная в разделе 7.2, аналогичным образом применяется для преобразования модели исполнительных устройств (7.7) относительно рассогласования (7.15), (7.19) к блочной форме управляемости с учетом возмущений вида

$$\dot{e}_3 = -K_3 e_3 + e_4 + \eta_1, \quad (7.58)$$

$$\dot{e}_4 = D_1 e_3 - (K_4 - K_3) e_4 + e_5 + \eta_2, \quad (7.59)$$

$$\dot{e}_5 = D_2 e_3 + D_3 e_4 + D_4 e_5 + K_4 \eta_2 + A_0 u, \quad (7.60)$$

где $e_4, e_5 \in R^n$ – новые переменные состояния: $e_4 = K\omega + K_3 e_3$, $e_5 = KJ^{-1}\Psi\dot{\tau} + K_4 e_4$; $K_3, K_4 \in R^{n \times n}$ – матрицы коэффициентов обратной связи, подлежащие определению; $A_0 = KJ^{-1}\Psi L^{-1}$, $\det(A_0) \neq 0$; $D_j \in R^{n \times n}$ ($j = \overline{1, 4}$) – диагональные матрицы с постоянными коэффициентами: $D_1 = -K - K_3^2$, $D_2 = J^{-1}\Psi^2 L^{-1} K_3 - K_4(K + K_3^2)$, $D_3 = L^{-1} R K_4 - J^{-1}\Psi^2 L^{-1} - K_4(K_4 - K_3)$, $D_4 = K_4 - L^{-1} R$; вектор-функции $\eta_1, \eta_2 \in R^n$, $\eta_1 = K(K_1^* e_1 - e_2) - \dot{\tau}^*$, $\eta_2 = K_3 \eta_1 - K \tau^*$ трактуются как внешние ограниченные возмущения:

$$\|\eta_j\| \leq \bar{\eta}_j = \text{const} > 0, \quad j = 1, 2. \quad (7.61)$$

Сформируем линейное управление вида

$$u = -A_0^{-1} K_5 e_5, \quad (7.62)$$

где $K_\mu = \text{diag}(k_{\mu_j})$, $k_{\mu_j} = k_\mu = \text{const} > 0$, $j = \overline{1, n}$, $\mu = \overline{3, 5}$.

Задача синтеза управления в исполнительных устройствах сводится к последовательному нахождению нижних оценок коэффициентов k_3, k_4, k_5 , при которых обеспечивается: отработка задания (7.19) с точностью (7.28) и ε -инвариантность к внешним возмущениям; до-

предельные декомпозиции верхнего уровня и процедуры синтеза в замкнутой системе (7.58)–(7.62). Для решения поставленных задач найдем достаточные условия устойчивости замкнутой системы (7.58)–(7.62) с помощью второго метода Ляпунова. При анализе квадратичной формы

$$V_\tau = V_3 + V_4 + V_5 = (1/2)e_3^T e_3 + (1/2)e_4^T e_4 + (1/2)e_5^T e_5 \quad (7.63)$$

также используем каскадный (пошаговый) принцип.

Шаг 1. Для производной первого слагаемого квадратичной формы (7.63) в силу (7.58), (7.61) справедлива следующая оценка: $\dot{V}_3 = e_3^T (e_4 - K_3 e_3 + \eta_1) \leq \|e_3\| (\|e_4\| - k_3 \|e_3\| + \bar{\eta}_1)$. Неравенство $\dot{V}_3 < 0$ обеспечивается вне окрестности

$$\|e_3\| \leq (\|e_4\| + \bar{\eta}_1) / k_3 \leq \delta_3 \quad (7.64)$$

при выполнении условий

$$k_{3f} > \bar{\eta}_1 / k_{2e}^* k_{1e}^* \delta_1, \quad k_{3e} > \|e_4\| / k_{2e}^* k_{1e}^* \delta_1, \quad k_3 = k_{3f} + k_{3e}. \quad (7.65)$$

Первое неравенство (7.65) является нижней оценкой для выбора $k_{3f} = k_{3f}^*$. Из второго при фиксированном значении $k_{3e} = k_{3e}^*$ определяется точность, которую требуется обеспечить в блоке (7.59) при стабилизации переменной e_4 :

$$\|e_4\| < k_{3e}^* k_{2e}^* k_{1e}^* \delta_1 = \delta_4 = \text{const}. \quad (7.66)$$

Шаг 2. Для производной второго слагаемого квадратичной формы (7.63) в силу (7.59), (7.61), (7.64) справедлива следующая оценка:

$$\dot{V}_4 = e_4^T (D_1 e_3 - (K_4 - K_3) e_4 + e_5 + \eta_2) \leq \|e_4\| (\|D_1\| (\|e_4\| + \bar{\eta}_1) / k_3^* - (k_4 - k_3^*) \|e_4\| + \|e_5\| + \bar{\eta}_2).$$

Неравенство $\dot{V}_4 < 0$ обеспечивается вне окрестности

$$\|e_4\| \leq (\|D_1\| \bar{\eta}_1 / k_3^* + \|e_5\| + \bar{\eta}_2) / (k_4 - k_3^* - \|D_1\| / k_3^*) \leq \delta_4 \quad (7.67)$$

при выполнении условий $k_4 = k_{4f} + k_{4e}$,

$$k_{4f} > (\|D_1\| \bar{\eta}_1 / k_3^* + \bar{\eta}_2) / (k_{3e}^* k_{2e}^* k_{1e}^* \delta_1) + k_3^* + \|D_1\| / k_3^*, \quad k_{4e} > \|e_5\| / (k_{3e}^* k_{2e}^* k_{1e}^* \delta_1). \quad (7.68)$$

Первое неравенство (7.68) является нижней оценкой для выбора $k_{4f} = k_{4f}^*$. Из второго при фиксированном значении $k_{4e} = k_{4e}^*$ определяется точность, которую требуется обеспечить в блоке (7.60) при стабилизации переменной e_5 :

$$\|e_5\| < k_{4e}^* k_{3e}^* k_{2e}^* k_{1e}^* \delta_1 = \delta_5 = \text{const}. \quad (7.69)$$

Шаг 3. Для производной третьего слагаемого квадратичной формы (7.63) в силу (7.60),

(7.61), (7.64), (7.67) справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} \dot{V}_5 &= e_5^T (D_2 e_3 + D_3 e_4 - (K_5 - D_4) e_5 + K_4 \eta_2) \leq \\ &\leq \|e_5\| ((-k_5 + \|D_4\| + \|D_5\|) \|e_5\| + \bar{\eta}_1 (\|D_5\| \|D_1\| + \|D_2\|) / k_3^* + \bar{\eta}_2 (\|D_5\| + k_4^*)), \end{aligned}$$

где $\|D_5\| = (\|D_2\| / k_3^* + \|D_3\|) / (k_4^* - k_3^* - \|D_1\| / k_3^*)$. Неравенство $\dot{V}_5 < 0$ обеспечивается вне окрестности

$$\|e_5\| \leq (\bar{\eta}_1 (\|D_5\| \|D_1\| + \|D_2\|) / k_3^* + \bar{\eta}_2 (\|D_5\| + k_4^*)) / (-k_5 + \|D_4\| + \|D_5\|) \leq k_{4e}^* k_{3e}^* k_{2e}^* k_{1e}^* \delta_1 = \delta_5$$

при выполнении условия

$$k_5 > (\bar{\eta}_1 (\|D_5\| \|D_1\| + \|D_2\|) / k_3^* + \bar{\eta}_2 (\|D_5\| + k_4^*)) / k_{4e}^* k_{3e}^* k_{2e}^* k_{1e}^* \delta_1 + \|D_4\| + \|D_5\|, \quad (7.70)$$

которое является нижней оценкой для выбора k_5 . Из условия (7.8) определяется верхняя оценка:

$$k_5 \leq U / \|A_0^{-1} e_5\|. \quad (7.71)$$

Если существует такое значение $k_5 = k_5^*$, которое одновременно удовлетворяет условиям (7.70), (7.71), то поставленная задача считается выполненной.

Синтез комбинированного управления.

Для обеспечения экспоненциальной сходимости (7.41) к заданию (7.39) и полной двух-уровневой декомпозиции процедуры синтеза в системе (7.7) организуется последовательный выбор комбинированных фиктивных управлений (аналогично второй процедуре из раздела 7.2). В результате неособых замен переменных модель исполнительных устройств (7.7) преобразуется относительно рассогласования (7.15), (7.39) к блочно-управляемой форме вида

$$\dot{e}_3 = -K_3 e_3 + e_4, \quad (7.72)$$

$$\dot{e}_4 = -K_4 e_4 + e_5, \quad (7.73)$$

$$\dot{e}_5 = -RL^{-1} e_5 + \phi + A_0 u, \quad (7.74)$$

где

$$\begin{aligned} e_4 &= K(\omega - e_2 + K_1^* e_1 - \dot{g}) - \dot{\tau}^* + K_3 e_3, \\ e_5 &= K(J^{-1}(\Psi \dot{e}_1 - e_3 - \tau^*) - \dot{e}_2 + K_1^* \dot{e}_1 - \ddot{g}) - \ddot{\tau}^* - K_3^2 e_3 + K_4 e_4 \\ \phi &= D_1 + D_2 e_3 + D_2 e_4, \quad \|\phi\| \leq \bar{\phi} = \text{const} > 0, \\ D_1 &= K(J^{-1}(\Psi L^{-1}(-R(\Psi^{-1}(J(K^{-1} \ddot{\tau}^* + \dot{e}_2 + K_1^{*2} e_1 + \ddot{g}) + \tau^*))) - \\ &\quad - \Psi(K^{-1} \dot{\tau}^* + e_2 - K_1^* e_1 + \dot{g})) - \dot{\tau}^*) - \ddot{e}_2 + K_1^{*3} e_1 - \ddot{g}) - \ddot{\tau}^*, \\ D_2 &= -KRL^{-1} + K_3 J^{-1}(\Psi^2 L^{-1} + K) - RL^{-1} K_3^2 + K_3^3, \\ D_3 &= -J^{-1} \Psi^2 L^{-1} + RL^{-1} K_4 - K_4^2, \quad A_0 = KJ^{-1} \Psi L^{-1}. \end{aligned} \quad (7.75)$$

Синтез непрерывного комбинированного управления

$$u = -A_0^{-1} K_5 e_5 - \phi \quad (7.76)$$

обеспечивает в замкнутом блоке (7.74), (7.76) $\dot{e}_5 = -(RL^{-1} + K_5)e_5$ экспоненциальную устойчивость переменной $e_5 \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ при любых $K_5 > 0$. Отсюда следует, что в блоке (7.73) $\dot{e}_4 = -K_4 e_4$ обеспечивается экспоненциальная устойчивость переменной $e_4 \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ при любых $K_4 > 0$. И, наконец, в блоке (7.72) $\dot{e}_3 = -K_3 e_3$ обеспечивается соотношение (7.41) при любых $K_3 > 0$. Если существует такое значение $k_5 = k_5^*$, которое одновременно удовлетворяет условиям $k_5 > 0$ (нижняя оценка) и $k_5 \leq (U - \bar{\phi}) / \|A_0^{-1} e_5\|$ (верхняя оценка), то поставленная задача считается выполненной. Для реализации алгоритма управления (7.76) по сравнению с линейным алгоритмом (7.62) потребуются более трудоемкие вычисления, в том числе вычисление $g^{(j)}(t), j = \overline{1, 5}; H_0^{(j)}, C_0^{(j)}, G_0^{(j)}, j = \overline{1, 3}$ и получение оценок $f^{(j)}(q_1, q_2, t), j = \overline{0, 3}$.

Синтез разрывных алгоритмов управления.

При формировании разрывного управления, аналогичного (7.54),

$$u = -A_0^{-1} M \text{sign} e_5, \quad (7.77)$$

соотношение $e_5 = 0$ обеспечивается за конечное время в замкнутых системах (7.60), (7.77)

$$\dot{e}_5 = D_2 e_3 + D_3 e_4 + D_4 e_5 + K_4 K_3 \eta_1 + K_4 \eta_2 - M \text{sign} e_5 \quad (7.78)$$

и в замкнутых системах (7.74), (7.77)

$$\dot{e}_5 = -RL^{-1} e_5 - M \text{sign} e_5 + \phi \quad (7.79)$$

при выполнении условий

$$e_5^T \dot{e}_5 < 0 \Rightarrow m > \| D_2 e_3 + D_3 e_4 + D_4 + K_4 K_3 \eta_1 + K_4 \eta_2 \|, \quad (7.80)$$

$$m > \bar{\phi} - \| RL^{-1} \| \quad (7.81)$$

для систем (7.78) и (7.79) соответственно. Если существуют такие значения амплитуд $m = m^*$, которые одновременно удовлетворяют неравенствам (7.80) или (7.81) (нижняя оценка) и неравенству (7.57) (верхняя оценку), то поставленная задача считается выполненной. Реализация разрывного управления (7.77) обеспечивает соотношения $e_5 = 0 \Rightarrow k_{4e}^* = 0$ (в отличие от алгоритма (7.62)) и не требует вычислений производных $g^{(5)}(t), H_0^{(3)}, C_0^{(3)}, G_0^{(3)}, f^{(3)}(q_1, q_2, t)$ (в отличие от алгоритма (7.76)). Таким образом, приведенные алгоритмы последовательного выбора в каждом блоке коэффициентов обратной связи обеспечивают двухуровневую декомпозицию задачи синтеза управления.

Последовательность этапов синтеза («сверху вниз») изображена на рис. 7.3 для случая эластичного сочленения.

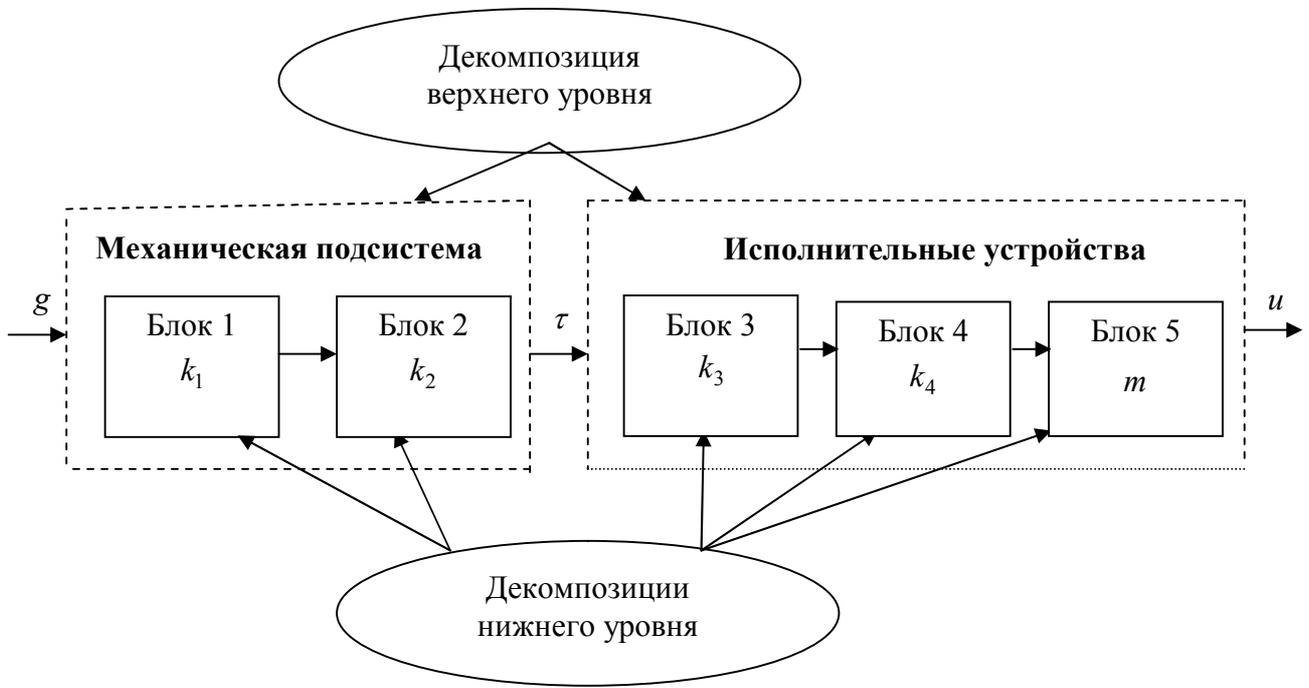


Рис. 7.3. Декомпозиция процедуры синтеза обратной связи

Ниже приведена сводная табл. 7.1, позволяющая сравнить априорные предположения, требуемые дополнительные вычисления и результаты использования методов разделения движений с большими коэффициентами и комбинированного управления для решения задачи слежения применительно к роботу-манипулятору с учетом динамики электроприводов постоянного тока с жестким или эластичным типом сочленений. В конкретной системе управления выбор того или иного способа синтеза обратной связи зависит от аппаратных возможностей, имеющихся вычислительных и управляющих ресурсов, а также технологических требований к качеству установившихся режимов и быстродействию переходных процессов.

Таблица 7.1

Априорные предположения	Тип сочленений	Класс управлений u	Дополнительные вычисления	Результат
1	2	3	4	5
<i>Метод разделения движений</i>				
$g(t), q_1, i$ – известны, $\ g(t)\ \leq G_0,$ $\ \dot{g}(t)\ \leq G_1,$ $\ f(t)\ \leq F,$ $\ H\ \leq \bar{H}, \ C\ \leq \bar{C},$ $\ G\ \leq \bar{G},$ $e_2^T [\frac{\dot{H}}{2} - C] e_2 \equiv 0$	жесткий	непрерывный (7.50)	\tilde{q}_2	$\ e_j\ \leq \delta_j,$ $j = \overline{1, 3}$
		разрывный (7.54)	\tilde{q}_2	$\ e_j\ \leq \delta_j,$ $j = \overline{1, 2}; e_3 = 0$
	эластичный	непрерывный (7.62)	$\tilde{q}_2, \tilde{\tau}, \tilde{\omega}$	$\ e_j\ \leq \delta_j,$ $j = \overline{1, 5}$
		разрывный (7.77)	$\tilde{q}_2, \tilde{\tau}, \tilde{\omega}$	$\ e_j\ \leq \delta_j,$ $j = \overline{1, 4}; e_5 = 0$

Комбинированное управление				
1	2	3	4	5
$g(t), q_1, i, H_0,$ C_0, G_0 – известны; $\ g^{(j)}(t)\ \leq G_j,$ $j = \overline{0, 5};$ $\ f^{(j)}(q_1, q_2, t)\ \leq F_j,$ $j = \overline{0, 3}$	жесткий	непрерывный (7.53)	$\tilde{q}_2; g^{(j)}, j = \overline{1, 3};$ $H_0^{(j)}, C_0^{(j)}, G_0^{(j)},$ $\hat{f}^{(j)}, j = \overline{0, 1}$	$e_j \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty, j = \overline{1, 3}$
		разрывный (7.54)	$\tilde{q}_2; g^{(j)}, j = \overline{1, 2};$ \hat{f}	$e_j \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty, j = \overline{1, 2};$ $e_3 = 0$
	эластичный	непрерывный (7.76)	$\tilde{q}_2, \tilde{\tau}, \tilde{\omega};$ $g^{(j)}, j = \overline{1, 5};$ $H_0^{(j)}, C_0^{(j)}, G_0^{(j)},$ $\hat{f}^{(j)}, j = \overline{0, 3}$	$e_j \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty, j = \overline{1, 5}$
		разрывный (7.77)	$\tilde{q}_2, \tilde{\tau}, \tilde{\omega};$ $g^{(j)}, j = \overline{1, 4};$ $H_0^{(j)}, C_0^{(j)}, G_0^{(j)},$ $\hat{f}^{(j)}, j = \overline{0, 2}$	$e_j \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty, j = \overline{1, 4};$ $e_5 = 0$

7.4. Информационное обеспечение базовых алгоритмов управления

В данном разделе решаются задачи информационного обеспечения синтеза непрерывного комбинированного управления при эластичном типе сочленений (7.76) как более трудоемкого в смысле вычислений (см. табл.7.1). Задачи информационного обеспечения для остальных алгоритмов управления, перечисленных в табл.7.1, являются частными случаями и решаются посредством процедур данного раздела при меньшем числе итераций. Теоретическая база для решения задач данного раздела разработана в главах 4, 5.

Информационное обеспечение алгоритма (7.76) заключается в решении следующих задач. По измерениям выходных переменных q_1, i получить оценки: 1) переменных q_2, τ, ω ; 2) возмущений $f(q_1, q_2, t)$ (7.36); 3) преобразованных переменных e_3 (7.15) с учетом (7.39), e_4, e_5, ϕ (7.75). Решение последней задачи включает в себя оценивание производных возмущающих воздействий $f^{(j)}(q_1, q_2, t), j = \overline{1, 3}$ и позволяет избежать непосредственных расчетов производных задающих воздействий $g^{(j)}(t), j = \overline{3, 5}$ и оператора объекта управления (7.35) $H_0^{(j)}, C_0^{(j)}, G_0^{(j)}, j = \overline{1, 3}$.

Для решения поставленных задач разработаны каскадные процедуры синтеза наблюдателей состояния с использованием метода разделения движений в классе систем с разрывными управлениями. Данный подход, как и в задачах управления, позволяет разделить исходную многомерную задачу наблюдения на независимо решаемые элементарные подзадачи размерности n и последовательно получить оценки неизвестных переменных при минимально возможном количестве измерений.

Динамическое устройство наблюдения полной размерности для оценки переменных $q_2, \tau, \omega, f(q_1, q_2, t)$ формируется на основе систем (7.1) с учетом (7.7), (7.35) и имеет следующий вид:

$$\dot{\tilde{q}}_1 = \tilde{q}_2 + v_1, \quad \dot{\tilde{q}}_2 = H_0^{-1}(q_1)[\tilde{\tau} - C_0(q_1, \tilde{q}_2)\tilde{q}_2 - G_0(q_1) + v_2], \quad (7.82)$$

$$\dot{\tilde{\tau}} = K(\tilde{\omega} - \tilde{q}_2) + v_\tau, \quad \dot{\tilde{\omega}} = J^{-1}(\Psi\tilde{i} - \tilde{\tau}) + v_\omega, \quad \dot{\tilde{i}} = L^{-1}(-R\tilde{i} - \Psi\tilde{\omega} + u) + v_i, \quad (7.83)$$

где уравнениями (7.82) описывается наблюдатель состояния механической подсистемы (7.1) с учетом (7.35); уравнениями (7.83) – наблюдатель состояния исполнительных устройств (7.7); $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{\tau}, \tilde{\omega}, \tilde{i} \in R^n$ – переменные состояния, $v_1, v_2, v_\tau, v_\omega, v_i \in R^n$ – корректирующие воздействия наблюдателя, служащие для стабилизации системы, записанной относительно невязок $\varepsilon_1 = q_1 - \tilde{q}_1, \varepsilon_2 = q_2 - \tilde{q}_2, \varepsilon_\tau = \tau - \tilde{\tau}, \varepsilon_\omega = \omega - \tilde{\omega}, \varepsilon_i = i - \tilde{i}$ в силу (7.1), (7.35), (7.7), (7.82)–(7.83) в виде

$$\dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2 - v_1, \quad (7.84)$$

$$\dot{\varepsilon}_2 = H_0^{-1}(q_1)[\varepsilon_\tau - \alpha(\varepsilon_2) + f - v_2], \quad (7.85)$$

$$\dot{\varepsilon}_\tau = K(\varepsilon_\omega - \varepsilon_2) - v_\tau, \quad (7.86)$$

$$\dot{\varepsilon}_\omega = J^{-1}(\Psi\varepsilon_i - \varepsilon_\tau) - v_\omega, \quad (7.87)$$

$$\dot{\varepsilon}_i = L^{-1}(-R\varepsilon_i - \Psi\varepsilon_\omega) - v_i, \quad (7.88)$$

где $\alpha = C_0(q_1, \tilde{q}_2 + \varepsilon_2)[\tilde{q}_2 + \varepsilon_2] - C_0(q_1, \tilde{q}_2)\tilde{q}_2, \|\alpha\| \leq N\|\varepsilon_2\|, N = \text{const} > 0$.

Система (7.84)–(7.88) является блочно-наблюдаемой формой, состоящей из пяти блоков, в каждом из которых размерности вектора состояния и корректирующих воздействий совпадают. На основе данной формы предлагаются каскадные (пошаговые) процедуры выбора разрывных корректирующих воздействий, позволяющих на каждом шаге последовательно решать элементарные подзадачи, которые заключаются в следующем: в каждом блоке независимо стабилизируется текущая переменная состояния и находится оценка переменной состояния следующего блока. Другими словами, из выходного воздействия текущего блока формируется входное (корректирующее) воздействие следующего блока.

7.4.1. Каскадный синтез наблюдателя состояния при отсутствии возмущений

В случае, когда в системе (7.35) параметрические и внешние возмущения отсутствуют $f(q_1, q_2, t) = 0$, для получения оценок переменных q_2, τ, ω, i необходимо и достаточно измерений положений манипулятора q_1 . Пусть $M_1, M_2, M_\tau, M_\omega, M_i \in R^{n \times n}$ – диагональные матрицы с положительными постоянными одинаковыми коэффициентами ($M = \text{diag}(m_j), m_j = m = \text{const} > 0, j = \overline{1, n}$), которые будут последовательно выбираться сверху вниз по ходу процедуры.

В уравнениях наблюдателя механической подсистемы (7.84)–(7.85) подача разрывного корректирующего воздействия вида:

1) $v_1 = M_1 \text{sign} \varepsilon_1$ за конечное время обеспечивает в блоке (7.84) $\dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2 - M_1 \text{sign} \varepsilon_1$ скользящие движения вдоль многообразия $S_1 = \{\varepsilon_1 = 0\}$ и, следовательно, соотношение $q_1 = \tilde{q}_1$ при выполнении условия существования скользящих режимов $\varepsilon_1^T \dot{\varepsilon}_1 < 0 \Rightarrow \|\varepsilon_2\| < m_1$. Согласно методу эквивалентного управления из равенства $\dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2 - v_{1\text{eq}} = 0$ получаем оценку $v_{1\text{eq}} = \varepsilon_2$, которая служит для формирования управляющего воздействия в следующем блоке (7.85);

2) $v_2 = M_2 \text{sign} v_{1\text{eq}}$ за конечное время обеспечивает в блоке (7.85) $\dot{\varepsilon}_2 = H_0^{-1}(q_1)[\varepsilon_\tau - \alpha(\varepsilon_2) - M_2 \text{sign} \varepsilon_2]$ скользящие движения вдоль многообразия

$S_2 = \{\varepsilon_2 = 0 \cap S_1\}$ и, следовательно, соотношение $q_2 = \tilde{q}_2$ при выполнении условия $\|\varepsilon_\tau\| < m_2$. В соответствии с методом эквивалентного управления получаем оценку $\dot{\varepsilon}_2 = 0 \Rightarrow \Rightarrow v_{2\text{eq}} = \varepsilon_\tau$, которая служит для формирования управляющего воздействия в блоке (7.86).

В данном параграфе все пошаговые этапы предлагаемых каскадных процедур наблюдения организованы по единому методическому принципу, описанному выше. Чтобы избежать повторений, в дальнейшем для каждого блока будем указывать входное (корректирующее) воздействие, фиктивные выходные переменные и условия существования скользящих режимов. В уравнениях наблюдателя исполнительных устройств (7.86)–(7.88) подача разрывной коррекции вида:

1) $v_\tau = M_\tau \text{sign} v_{2\text{eq}}$ обеспечивает в блоке (7.86) стабилизацию переменной $\varepsilon_\tau = 0$, $S_\tau = \{\varepsilon_\tau = 0 \cap S_2\}$ и выход $v_{\tau\text{eq}} = K\varepsilon_\omega$ при выполнении условий $\varepsilon_2 = 0$,

$$\|K(\varepsilon_\omega - \varepsilon_2)\| < m_\tau; \quad (7.89)$$

2) $v_\omega = M_\omega \text{sign}(K^{-1}v_{\tau\text{eq}})$ обеспечивает в блоке (7.87) стабилизацию переменной $\varepsilon_\omega = 0$, $S_\omega = \{\varepsilon_\omega = 0 \cap S_\tau\}$ и выход $v_{\omega\text{eq}} = J^{-1}\Psi\varepsilon_i$ при выполнении условий $\varepsilon_\tau = 0$,

$$\|J^{-1}\Psi\varepsilon_i\| < m_\omega; \quad (7.90)$$

3) $v_i = M_i \text{sign}(\Psi^{-1}Jv_{\omega\text{eq}})$ обеспечивает в блоке (7.89) стабилизацию переменной $\varepsilon_i = 0$, $S_i = \{\varepsilon_i = 0 \cap S_\omega\}$ при выполнении условия

$$\|L^{-1}\Psi\varepsilon_\omega\| < m_i. \quad (7.91)$$

7.4.2. Каскадный синтез наблюдателя состояния в условиях неопределенности

При действии на систему (7.35) неконтролируемых, но ограниченных возмущений $f(q_1, q_2, t) \neq 0$ их оценку и оценки переменных q_2, τ, ω можно получить с помощью наблюдателя состояния (7.82)–(7.83) при дополнительном измерении токов якоря i . В этом случае синтез осуществляется снизу вверх и в уравнениях наблюдателя исполнительных устройств (7.83) подача разрывной коррекции вида:

1) $v_i = M_i \text{sign} \varepsilon_i$ обеспечивает в блоке (7.88) стабилизацию переменной $\varepsilon_i = 0$, $S_i = \{\varepsilon_i = 0\}$ и выход $v_{i\text{eq}} = -L^{-1}\Psi\varepsilon_\omega$ при выполнении условия (7.91);

2) $v_\omega = M_\omega \text{sign}(-\Psi^{-1}Lv_{i\text{eq}})$ обеспечивает в блоке (7.87) стабилизацию переменной $\varepsilon_\omega = 0$, $S_\omega = \{\varepsilon_\omega = 0 \cap S_i\}$ и выход

$$v_{\omega\text{eq}} = -J^{-1}\varepsilon_\tau \quad (7.92)$$

при выполнении условий $\varepsilon_i = 0$, (7.90);

3) $v_\tau = M_\tau \text{sign}(-Jv_{\omega\text{eq}})$ обеспечивает в блоке (7.86) стабилизацию переменной $\varepsilon_\tau = 0$, $S_\tau = \{\varepsilon_\tau = 0 \cap S_\omega\}$ и выход

$$v_{\tau\text{eq}} = -K\varepsilon_2 \quad (7.93)$$

при выполнении условий $\varepsilon_\omega = 0$, (7.89).

В уравнениях наблюдателя механической подсистемы (7.82) подача разрывного управляющего воздействия

$$v_2 = M_2 \text{sign}(-K^{-1}v_{\text{req}}) \quad (7.94)$$

обеспечивает в блоке (7.85) стабилизацию переменной $\varepsilon_2 = 0$, $S_2 = \{\varepsilon_2 = 0 \cap S_\tau\}$ при выполнении условий $\varepsilon_\tau = 0$, $F_0 < m_2$ и выход

$$v_{2\text{eq}} = f(q_1, q_2, t), \quad (7.95)$$

который является оценкой неконтролируемых возмущений. В описанной процедуре блок (7.84) оказался незадействованным. При необходимости данный блок также может быть использован для формирования входного воздействия блока (7.85) ($v_2 = M_2 \text{sign}v_{1\text{eq}}$, $v_{1\text{eq}} = \varepsilon_2$) или для фильтрации измерений q_1 при формировании непрерывной коррекции.

Замечание 7.4. Для системы (7.1) без учета (7.35) описанная процедура может быть использована для получения оценок переменных q_2 , τ , ω по измерениям q_1 , i следующим образом. Второе уравнение наблюдателя механической подсистемы (7.82) принимает вид $\dot{\tilde{q}}_2 = v_2$ или относительно невязок $\varepsilon_2 = q_2 - \tilde{q}_2$:

$$\dot{\varepsilon}_2 = H^{-1}(q_1)[\tilde{\tau} - C(q_1, \tilde{q}_2)\tilde{q}_2 - G(q_1) + \eta] - v_2. \quad (7.96)$$

В блоке (7.96) подача коррекции в виде (7.94) (или $v_2 = M_2 \text{sign}v_{1\text{eq}}$, $v_{1\text{eq}} = \varepsilon_2$) обеспечивают стабилизацию переменной $\varepsilon_2 = 0$ при выполнении условия $\|H^{-1}(q_1)[\tilde{\tau} - C(q_1, \tilde{q}_2)\tilde{q}_2 - G(q_1) + \eta]\| < m_2$, и выход

$$v_{2\text{eq}} = H^{-1}(q_1)[\tilde{\tau} - C(q_1, \tilde{q}_2)\tilde{q}_2 - G(q_1) + \eta],$$

который является совместной оценкой оператора объекта управления (7.1) и внешних возмущений $\eta(t)$.

7.4.3. Каскадный синтез наблюдателя состояния преобразованных переменных

Как было отмечено, для формирования алгоритма управления (7.76) требуются значения преобразованных переменных e_3 (7.15), (7.39), e_4 , e_5 , ϕ (7.75), которые получены путем трехкратного дифференцирования исходных переменных и возмущающих воздействий. Даже при наличии постоянных возмущений $\dot{f} = 0$ получение необходимой информации непосредственно с помощью вычислений может оказаться достаточно сложной аналитической задачей.

В данном параграфе решается задача оценки преобразованных переменных e_3 , e_4 , e_5 , ϕ с помощью наблюдателя состояния, сформированного на основе системы (7.72)–(7.74):

$$\dot{\tilde{e}}_3 = -K_3 \tilde{e}_3 + \tilde{e}_4 + v_3,$$

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{e}}_4 &= -K_4\tilde{e}_4 + \tilde{e}_5 + \nu_4, \\ \dot{\tilde{e}}_5 &= -RL^{-1}\tilde{e}_5 + A_0u + \nu_5,\end{aligned}\tag{7.97}$$

где $\tilde{e}_j \in R^n$, $j = \overline{3, 5}$ – переменные состояния, $\nu_j \in R^n$, $j = \overline{3, 5}$ – корректирующие воздействия наблюдателя, служащие для стабилизации системы (7.97), записанной относительно невязок $\xi_j = e_j - \tilde{e}_j$, $j = \overline{1, 3}$ в силу (7.72)–(7.74), (7.97) в виде:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_3 &= -K_3\xi_3 + \xi_4 - \nu_3, \\ \dot{\xi}_4 &= -K_4\xi_4 + \xi_5 - \nu_4, \\ \dot{\xi}_5 &= -RL^{-1}\xi_5 + \phi_3 - \nu_5.\end{aligned}\tag{7.98}$$

В качестве входного воздействия для систем (7.97), (7.98) принимается невязка $\xi_3 = e_3 - \tilde{e}_3$, где переменная e_3 (7.15), (7.38)–(7.39)

$$e_3 = \tau + H_0[K_2^*(q_2 - \dot{g} - \ddot{g} + K_1^*(q_1 - g)) - K_1^{*2}(q_1 - g)] + f(q_1, q_2, t) - C_0q_2 - G_0\tag{7.99}$$

формируется из переменных состояния наблюдателя $\tau = \tilde{\tau}$, $q_2 = \tilde{q}_2$ и эквивалентного управления (7.95), полученных в предыдущем параграфе.

Аналогично предыдущим процедурам синтеза задачи наблюдения, подача разрывного корректирующего воздействия вида

- 1) $\nu_3 = M_3 \text{sign} \xi_3$ (где $M_\mu = \text{diag}(m_{\mu j})$, $m_{\mu j} = m_\mu = \text{const} > 0$, $j = \overline{1, n}$, $\mu = \overline{3, 5}$) обеспечивает в первом блоке системы (7.98) при выполнении условия $\|\xi_4\| < m_3$ выход $\nu_{3\text{eq}} = \xi_4$;
- 2) $\nu_4 = M_4 \text{sign} \nu_{3\text{eq}}$ обеспечивает во втором блоке системы (7.98) при выполнении условия $\|\xi_5\| < m_4$ выход $\nu_{4\text{eq}} = \xi_5$;
- 3) $\nu_5 = M_5 \text{sign} \nu_{4\text{eq}}$ обеспечивает в последнем блоке системы (7.98) при выполнении условия $\bar{\phi} < m_5$ выходное воздействие $\nu_{5\text{eq}} = \phi$.

Таким образом, стабилизация переменных систем (7.84)–(7.88), (7.98) происходит при последовательной организации быстрых движений в каждом блоке. Скользящие (медленные) движения возникают при конечном значении амплитуд разрывных управляющих воздействий наблюдателя за теоретически конечное время, что позволяет не учитывать рассогласование между переменными состояния объекта управления и наблюдателя состояния при синтезе алгоритмов управления.

Структурная схема формирования разрывных корректирующих воздействий наблюдателей состояния (7.82)–(7.83) и (7.97) представлена на рис. 7.4. Значения эквивалентных управлений равны средним значениям соответствующих разрывных коррекций и, как и раньше, определяются с помощью линейных фильтров первого порядка с малой постоянной времени (блоки «Ф» на рис.7.4).

7.5.1. Описание объекта управления. Постановка задач

Движение маятника с учетом динамики исполнительных устройств можно описать системой нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка вида [36]:

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = \sin x_1 + x_3, \dot{x}_3 = u, \quad (7.100)$$

где x_1 – угловое положение маятника (скалярный выход), x_2 – скорость, x_3 – крутящий момент, приложенный к маятнику на оси подвеса, который развивается электрическим исполнительным устройством с разрывным управлением u . Заметим, что вид системы (7.100) является одновременно и блочно-управляемым и блочно-наблюдаемым относительно выхода (см. раздел 2.5).

Для системы (7.100) ставится задача слежения относительно выходной переменной (в частности, стабилизация угла отклонения маятника от верхнего вертикального положения) которая сводится к задаче стабилизации системы, записанной относительно невязки выходной переменной $\bar{x}_1 = x_1 - x_{1d}$, где задающее воздействие $x_{1d}(t)$ является известной функцией времени с ограниченной по модулю первой производной

$$|\dot{x}_{1d}| \leq D = \text{const}. \quad (7.101)$$

С учетом сделанных обозначений система (7.100) принимает вид

$$\dot{\bar{x}}_1 = x_2 - \dot{x}_{1d}, \dot{x}_2 = \sin(\bar{x}_1 + x_{1d}) + x_3, \dot{x}_3 = u. \quad (7.102)$$

Для системы (7.102) в соответствии с разработанными в данной главе каскадными процедурами синтеза решаются: 1) в параграфе 7.5.2 – задача обеспечения заданной точности слежения

$$|\bar{x}_1| \leq \delta_1 = \text{const}; \quad (7.103)$$

2) в параграфе 7.5.3 – задача обеспечения экспоненциальной сходимости к заданным траекториям:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}_1 = 0. \quad (7.104)$$

Предположения о степени неопределенности объекта управления будут сделаны по ходу изложения.

7.5.2. Обеспечение заданной точности слежения

В данном параграфе решается задача обеспечения заданной точности (7.103) в предположении, что производная задания \dot{x}_{1d} является неизвестной функцией времени, удовлетворяющей (7.101), и трактуется как внешнее возмущение.

Базовый алгоритм управления.

Базовый алгоритм управления (все координаты вектора состояния системы (7.102) полагаются известными) сформируем в соответствии с каскадным принципом следующим обра-

зом: введем неособые замены переменных

$$\bar{x}_2 = x_2 + k_1 \bar{x}_1, \quad \bar{x}_3 = x_3 + \sin(\bar{x}_1 + x_{1d}) + k_1 x_2 + k_2 \bar{x}_2, \quad (7.105)$$

где k_1, k_2 – положительные коэффициенты обратной связи, подлежащие определению. Относительно новых переменных с учетом (7.102) получим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= -k_1 \bar{x}_1 + \bar{x}_2 - \dot{x}_{1d}, \quad \dot{\bar{x}}_2 = -k_2 \bar{x}_2 + \bar{x}_3 - k_1 \dot{x}_{1d}, \\ \dot{\bar{x}}_3 &= \cos(\bar{x}_1 + x_{1d})(\bar{x}_2 - k_1 \bar{x}_1) + k_1^3 \bar{x}_1 - (k_1^2 + k_2^2 + k_1 k_2) \bar{x}_2 + (k_1 + k_2) \bar{x}_3 - k_1 k_2 \dot{x}_{1d} + u, \end{aligned} \quad (7.106)$$

где выбор разрывного управления $u = -M \text{sign}(\bar{x}_3)$ (в исходных координатах системы (7.102) $\bar{x}_3 = x_3 + \sin(\bar{x}_1 + x_{1d}) + (k_1 + k_2)x_2 + k_2 k_1 \bar{x}_1$) с положительной амплитудой

$$M > \left| \cos(\bar{x}_1 + x_{1d})(\bar{x}_2 - k_1 \bar{x}_1) + k_1^3 \bar{x}_1 - (k_1^2 + k_2^2 + k_1 k_2) \bar{x}_2 - k_1 k_2 \dot{x}_{1d} \right| + k_1 + k_2 \quad (7.107)$$

обеспечивает за конечное время возникновение скользящего режима по поверхности $\bar{x}_3 = 0$, что приводит к понижению порядка системы (7.106), поведение которой в скользящем режиме описывается двумя уравнениями:

$$\dot{\bar{x}}_1 = -k_1 \bar{x}_1 + \bar{x}_2 - \dot{x}_{1d}, \quad \dot{\bar{x}}_2 = -k_2 \bar{x}_2 - k_1 \dot{x}_{1d}. \quad (7.108)$$

Выражение (7.107), где $M < \bar{M}$ (\bar{M} – максимально допустимая амплитуда) являются верхней оценкой для выбора коэффициентов обратной связи k_1, k_2 . Синтез обратной связи системы (7.108) сводится к пошаговому выбору коэффициентов обратной связи с целью обеспечить заданную точность (7.103). В первом уравнении (7.108) выражение (7.103) или $|\bar{x}_1| \leq (|\bar{x}_2| + D)/k_1 \leq \delta_1$ обеспечивается посредством выбора

$$k_1 = k_{1f} + k_{1x}, \quad (7.109)$$

где $k_{1f} > D/\delta_1$, $k_{1x} > |\bar{x}_2|/\delta_1$, откуда получаем точность $|\bar{x}_2| \leq k_{1x} \delta_1 = \delta_2$, которую требуется обеспечить во втором уравнении системы (7.108) $|\bar{x}_2| \leq k_1 D/k_2 \leq \delta_2$ посредством выбора $k_2 > k_1 D/\delta_2$ или

$$k_2 > k_1 D/(k_{1x} \delta_1). \quad (7.110)$$

Ниже приведены результаты моделирования данного алгоритма синтеза обратной связи в предположении, что на модель объекта управления действует внешнее скалярное возмущение $\eta(t)$, которое полагается неизвестной, ограниченной по модулю функцией времени $|\eta(t)| \leq \Phi = \text{const}$ и отделено от управления одним интегратором:

$$\dot{\bar{x}}_1 = x_2 - \dot{x}_{1d}, \quad \dot{\bar{x}}_2 = \sin x_1 + x_3 + \eta, \quad \dot{x}_3 = u. \quad (7.111)$$

На рис. 7.5 показана отработка ступенчатого задающего воздействия (единичный скачек в 1 рад) при синусоидальном внешнем возмущении $\eta = 0,8 \sin 3t$ и параметрах обратной связ-

зи $k_1 = 10$, $k_2 = 2$, $M = 50$. По горизонтальной оси отложено время t (в секундах), а по вертикальной оси – соответствующие координаты.

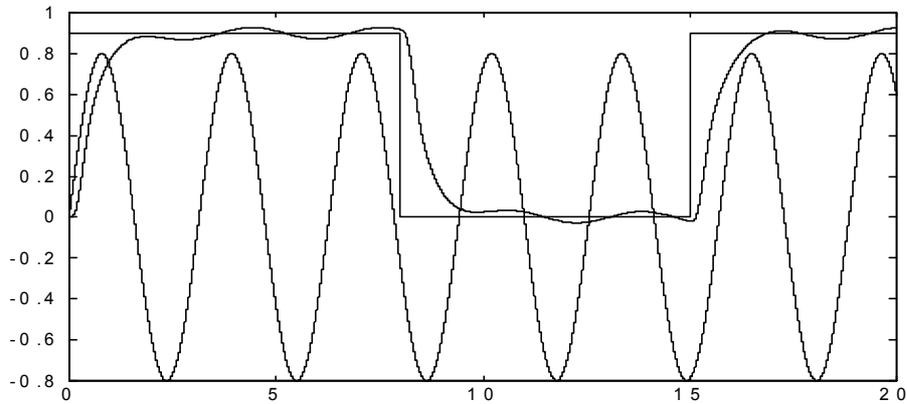


Рис 7.5. Обработка ступенчатого задающего воздействия, «— — —» – задание $x_{1d}(t)$; «---» – выходная переменная $x_1(t)$, «~ ~ ~» – внешнее возмущение $\eta(t)$

Из диаграмм рис. 7.5,б видно, что при выбранных параметрах обратной связи перевод замкнутой системы в заданное положение осуществляется примерно за 2 секунды, внешние возмущения подавляются примерно десятикратно, обеспечивается точность слежения $\delta_1 \approx 0,05$.

Синтез наблюдателя состояния.

В случае, когда не все координаты вектора состояния доступны измерению, следует предварительно решить задачу наблюдения. Сначала рассмотрим ситуацию, когда $\eta(t) = 0$ и измеряются выходная переменная x_1 и задающее воздействие x_{1d} . Тогда в терминах систем (7.102) или (7.106) координата \bar{x}_1 – известна, но из-за наличия неизвестного возмущения \dot{x}_{1d} координаты x_2, x_3 (7.102) или \bar{x}_2, \bar{x}_3 (7.105) ненаблюдаемы. Отсюда следует, что в данном случае нет возможности решить задачу управления и наблюдения в одних и тех же переменных, и для оценивания неизмеряемых координат x_2, x_3 за основу наблюдателя состояния принимается исходная система (7.100). Наблюдатель состояния на скользящих режимах описывается динамической системой вида

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 + M_1 \text{sign}(x_1 - z_1), & \dot{z}_2 &= \sin x_1 + z_3 + M_2 \text{sign}(\tau_1), & \dot{z}_3 &= u + M_3 \text{sign}(\tau_2), \\ \mu_1 \dot{\tau}_1 &= -\tau_1 + M_1 \text{sign}(\varepsilon_1), & \mu_2 \dot{\tau}_2 &= -\tau_2 + M_2 \text{sign}(\tau_1), \end{aligned} \quad (7.112)$$

где $z_i, i = \overline{1, 3}$ – переменные состояния наблюдателя, $\mu_1, \mu_2 \rightarrow 0$ – постоянные времени, τ_1, τ_2 – переменные высокочастотных фильтров первого порядка. С учетом (7.100), (7.112) уравнения относительно невязок $\varepsilon_i = x_i - z_i, i = \overline{1, 3}$ примут вид

$$\dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2 - M_1 \text{sign}(\varepsilon_1), \quad \dot{\varepsilon}_2 = \varepsilon_3 - M_2 \text{sign}(\tau_1), \quad \dot{\varepsilon}_3 = -M_3 \text{sign}(\tau_2). \quad (7.113)$$

При выполнении условия $M_1 > |\varepsilon_2|$ в первом уравнении системы (7.112) за конечное время решается задача стабилизации переменной $\varepsilon_1 = 0$, а эквивалентное значение разрыв-

ного управления, получаемое на выходе первого фильтра, равно переменной второго уравнения (7.113) $\tau_1 = \varepsilon_2$. Аналогично решается задача стабилизации переменной $\varepsilon_2 = 0 \Rightarrow \tau_2 = \varepsilon_3$, а затем $\varepsilon_3 = 0$. Малую динамику фильтрующих устройств не учитываем.

Ниже приведены результаты моделирования возможной практической ситуации, когда реальная система отличается от построенной модели (7.100) некоторыми параметрами и наличием внешних неконтролируемых возмущений:

$$\dot{x}_1 = 0,8x_2 + f, \quad \dot{x}_2 = \sin x_1 + x_3 + \eta, \quad \dot{x}_3 = u, \quad (7.114)$$

т.е. при моделировании на реальную систему (7.114) были дополнительно поданы синусоидальное и ступенчатое возмущения вида

$$\eta(t) = 0,8 \sin 3t, \quad f(t) = \begin{cases} 0,9 & \text{при } 0 \leq t \leq 5, \\ 0 & \text{при } t > 5, \end{cases} \quad (7.115)$$

которые не учитывались при решении задачи наблюдения (7.112)–(7.113). Обратная связь в системе (7.114)–(7.115) формируется по переменным наблюдателя (7.112) $u = -M \text{sign}(\bar{z}_3)$, где $\bar{z}_3 = z_3 + \sin z_1 + (k_1 + k_2)z_2 + k_2k_1(z_1 - x_{1d})$. Параметры наблюдателя выбраны в виде $M_1 = M_2 = 10$, $\mu_1 = \mu_2 = 0,01$, $M_3 = 50$, а коэффициенты обратной связи такие же, как и в системе (7.111): $k_1 = 10$, $k_2 = 2$, $M = 50$. На рис. 7.6 показана отработка ступенчатого задающего воздействия в условиях указанных неопределенностей. Из-за наличия неучтенных возмущений задача наблюдения решается с некоторой погрешностью, что, тем не менее, позволило обеспечить стабилизацию замкнутой системы примерно с той же точностью $\delta_1 \approx 0,05$, как и при наличии полной информации о параметрах и компонентах вектора состояний (см. рис. 7.5).

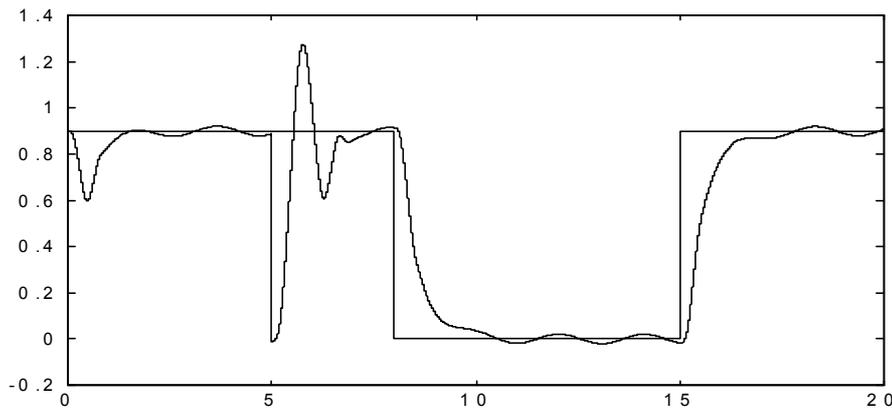


Рис. 7.6. Отработка ступенчатого задающего воздействия в условиях неопределенностей (7.115), «— — —» — задание $x_{1d}(t)$; «—» — выходная переменная $x_1(t)$

7.5.3. Обеспечение экспоненциальной сходимости

Базовый алгоритм управления.

Как было показано в предыдущих разделах данной главы, экспоненциальное схождение к заданным траекториям (7.104) можно обеспечить, если предполагать существование производных (в данном случае до третьего порядка включительно) задающего воздействия. Пред-

положим, что $\dot{x}_{1d}(t)$, $\ddot{x}_{1d}(t)$, $\ddot{\bar{x}}_{1d}(t)$ – неизвестные, ограниченные по модулю функции времени. Тогда система (7.102) может быть приведена к минифазному каноническому виду

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= -k_1\bar{x}_1 + \bar{x}_2, \quad \dot{\bar{x}}_2 = -k_2\bar{x}_2 + \bar{x}_3, \\ \dot{\bar{x}}_3 &= u + (\bar{x}_2 - k_1\bar{x}_1 + \dot{x}_{1d}) \cos(\bar{x}_1 + x_{1d}) + k_1^3\bar{x}_1 - (k_1^2 + k_1k_2 + k_2^2)\bar{x}_2 + \\ &+ (k_1 + k_2)\bar{x}_3 - (k_1^2 + k_1k_2)x_{1d} + (k_1^2 + k_1k_2)\dot{x}_{1d} - \ddot{x}_{1d} \end{aligned} \quad (7.116)$$

с помощью неособых замен переменных $\bar{x}_1 = x_1 - x_{1d}$, $\bar{x}_2 = x_2 + k_1\bar{x}_1 - \dot{x}_{1d}$, $\bar{x}_3 = x_3 + \sin x_1 + (k_1 + k_2)x_2 + k_2k_1\bar{x}_1 - (k_1 + k_2)\dot{x}_{1d} - \ddot{x}_{1d}$. Выбор разрывного управления

$$u = -M \text{sign}(\bar{x}_3) \quad (7.117)$$

с амплитудой

$$\begin{aligned} M > \left| (\bar{x}_2 - k_1\bar{x}_1 + \dot{x}_{1d}) \cos(\bar{x}_1 + x_{1d}) + k_1^3\bar{x}_1 - (k_1^2 + k_1k_2 + k_2^2)\bar{x}_2 - \right. \\ \left. - (k_1^2 + k_1k_2)x_{1d} + (k_1^2 + k_1k_2)\dot{x}_{1d} - \ddot{x}_{1d} \right| + k_1 + k_2 \end{aligned}$$

приведет к возникновению за конечное время скользящего режима по поверхности $\bar{x}_3 = 0$, порядок системы (7.116) понизится до второго:

$$\dot{\bar{x}}_1 = -k_1\bar{x}_1 + \bar{x}_2, \quad \dot{\bar{x}}_2 = -k_2\bar{x}_2, \quad (7.118)$$

и экспоненциальная устойчивость (7.104) обеспечивается в подсистеме (7.118) при любых $k_1 > 0$, $k_2 > 0$.

Наблюдатель преобразованных переменных.

Для синтеза управления (7.117) получим оценки преобразованных переменных, принимая за основу наблюдателя на скользящих режимах систему (7.116), которая является наблюдаемой относительно выхода \bar{x}_1 :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}_1 &= -k_1\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + M_1 \text{sign}(\bar{x}_1 - \bar{z}_1), \quad \dot{\bar{z}}_2 = -k_2\bar{z}_2 + \bar{z}_3 + M_2 \text{sign}(\tau_1), \\ \dot{\bar{z}}_3 &= u + (\bar{z}_2 - k_1\bar{z}_1) \cos(\bar{x}_1 + x_{1d}) + k_1^3\bar{z}_1 - (k_1^2 + k_1k_2 + k_2^2)\bar{z}_2 + \\ &+ (k_1 + k_2)\bar{z}_3 - (k_1^2 + k_1k_2)x_{1d} + M_3 \text{sign}(\tau_2), \\ \mu_1 \dot{\tau}_1 &= -\tau_1 + M_1 \text{sign}(\bar{x}_1 - \bar{z}_1), \quad \mu_2 \dot{\tau}_2 = -\tau_2 + M_2 \text{sign}(\tau_1), \end{aligned} \quad (7.119)$$

где \bar{z}_i , $i = \overline{1, 3}$ – переменные состояния наблюдателя, $\mu_1, \mu_2 \rightarrow 0$ – постоянные времени, τ_1, τ_2 – переменные высокочастотных фильтров первого порядка. С учетом (7.116), (7.119) уравнения относительно невязок $\xi_i = \bar{x}_i - \bar{z}_i$, $i = \overline{1, 3}$ примут вид

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= -k_1\xi_1 + \xi_2 - M_1 \text{sign}(\xi_1), \quad \dot{\xi}_2 = -k_2\xi_2 + \xi_3 - M_2 \text{sign}(\tau_1), \\ \dot{\xi}_3 &= (\xi_2 - k_1\xi_1) \cos(\bar{x}_1 + x_{1d}) + k_1^3\xi_1 - (k_1^2 + k_1k_2 + k_2^2)\xi_2 + (k_1 + k_2)\xi_3 + \\ &+ \dot{x}_{1d} \cos(\bar{x}_1 + x_{1d}) + (k_1^2 + k_1k_2)\dot{x}_{1d} - \ddot{x}_{1d} - M_3 \text{sign}(\tau_2). \end{aligned} \quad (7.120)$$

Задача стабилизации системы (7.120) решается за теоретически конечное время при соответствующем выборе амплитуд разрывных корректирующих воздействий.

В заключение главы кратко перечислим полученные результаты.

Предложен методологический подход к каскадному синтезу системы управления манипуляционным роботом, функционирующим в условиях неопределенности и действия внешних возмущений, с учетом динамики электроприводов постоянного тока. Для решения задачи слежения за заданными траекториями предложена алгоритмическая двухуровневая декомпозиция с разделением исходной задачи синтеза управления на независимо решаемые подзадачи меньшей размерности: синтез управляющих воздействий в механической подсистеме; синтез управляющих воздействий в исполнительных устройствах с дальнейшим разделением задач синтеза в каждой из этих подсистем на элементарные подзадачи.

Разработаны два типа каскадных процедур синтеза обратной связи (разделы 7.2–7.3):

– первая процедура, которая отличается простотой вычислительного обеспечения, основана на использовании допредельных свойств систем с большими коэффициентами и позволяет обеспечить: движение манипулятора в заданной окрестности желаемых траекторий; ε -инвариантность к возмущениям; допредельную декомпозицию процедуры синтеза. В данном случае обычные предположения о гладкости производных задающего и возмущающих воздействий не требуются;

– вторая процедура, требующая информационного обеспечения гораздо большего объема, основана на методе комбинированного управления и позволяет обеспечить экспоненциальную сходимость к заданным траекториям, компенсацию возмущений и полную двухуровневую декомпозицию процедуры синтеза.

Разработаны каскадные процедуры синтеза наблюдателей состояний и возмущений по измерениям положений манипулятора и токов якоря электроприводов.

Разработанные алгоритмы подтверждены результатами моделирования на ПК.

Глава 8. ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДВИГАТЕЛЕМ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯ (ДВС)

В последнее время все более ужесточаются законодательные нормы на выбросы токсичных веществ двигателями внутреннего сгорания (ДВС) автомобилей и топливную экономичность. Улучшение токсических показателей может быть обеспечено путем повышения точности контроля состава рабочей смеси, дальнейшим совершенствованием топливной аппаратуры и разработкой эффективных алгоритмов управления.

Разработка и применение электронных исполнительных элементов на основе микропроцессорной техники и математического описания работы ДВС пробудили большой интерес к проблеме управления ДВС специалистов в области управления. Более того, именно с работами по совершенствованию алгоритмов управления в настоящее время связаны уже достигнутые результаты по разработке транспортных средств с повышенными характеристиками по экономичности, токсичным выбросам, безопасности движения и их дальнейшему совершенствованию. Системы управления двигателем автомобиля постоянно совершенствуются и усложняются в связи с необходимостью более точной регулировки токсичности выхлопных газов и в то же время для соблюдения требований по экономии топлива без ухудшения управляемости и мощностных показателей двигателя [25].

Факторы, влияющие на экологические, экономические и энергетические показатели автомобильного двигателя с искровым зажиганием многочисленны и разнообразны. Сложность оптимизации рабочего цикла заключается в том, что различные факторы действуют различно, и оптимальное влияние одного не совпадает с оптимальным действием другого, а иногда их действие противоположно. В количественном отношении влияние этих факторов будет зависеть от конструкции, условий эксплуатации, включая стиль вождения, технического состояния автомобиля и двигателя, и т.д. Автомобильные двигатели, особенно в условиях городского цикла, работают в основном на нестационарных режимах. Проблема управления циклами осложняется тем, что на объективные факторы налагаются субъективные факторы в сложной многоплановой системе двигатель–автомобиль–среда–водитель.

Современные масштабы выпуска ДВС и их использование привели к тому, что их воздействие на окружающую среду значительно усилилось. Размеры выбросов токсичных веществ могут существенно менять концентрации химических веществ, входящих в состав воздуха, воды, почв, которые становятся опасными для жизни человека. Значительное влияние на токсичность отработавших газов (ОГ) оказывает состав горючей смеси. Проблема экологического совершенства ДВС сводится в основном к поиску способов снижения содержания токсичных веществ в ОГ. К ним относятся: повышение качества изготовления двигателей; совершенствование систем питания и зажигания; отказ от применения бензинов с содержанием тетраэтилсвинца, переход на газообразные топлива; рециркуляция отработавших газов и, наконец, нейтрализация ОГ – радикальный способ уменьшения токсичности.

Каталитический нейтрализатор отработавших газов, применяемый для нейтрализации трех компонентов (CO , CH , NO_x) называется трехкомпонентным или бифункциональным, его эффективность в значительной степени зависит от состава смеси, на которой работает двигатель. Существует очень узкий диапазон составов смеси вблизи $\alpha = 1$, когда наблюдается высокая степень преобразования одновременно всех трех основных компонентов, т.е. когда кислорода, освобождающегося при восстановлении NO_x , достаточно для окисления CO и CH . Кислородный датчик (λ -зонд или датчик состава выхлопных газов) подает сигнал, изменяющийся почти ступенчато в зоне $\alpha = 1$. Для поддержания состава смеси воздух/топливо в узком диапазоне по критерию стехиометрии требуется совершенствовать системы управления топливоподачей.

В данной главе разработаны алгоритмы управления подачей топлива в ДВС с обратной связью по релейному λ -зонду. Существенно, что модель топливоподачи ДВС включает в себя транспортное запаздывание, связанное с переносом отработанных газов к месту положения

датчика состава выхлопных газов.

Глава состоит из трех разделов. Раздел 8.1. носит теоретический характер. В нем предложены различные способы информационного обеспечения и решения задачи стабилизации при релейных измерениях. Дается краткий обзор известных методов синтеза систем с запаздыванием и предлагаются на инженерном уровне методы решения таких задач при релейных измерениях. На основе результатов раздела 8.1 в разделе 8.2 разработаны каскадные алгоритмы синтеза системы управления топливоподачей ДВС с обратной связью по λ -зонду. Приведены результаты моделирования различных схем компенсации запаздывания применительно к системе топливоподачи ДВС. В разделе 8.3 предложен каскадный синтез наблюдателя переменных воздушного тракта ДВС по показаниям датчика давления во впускном трубопроводе.

8.1. Каскадный синтез систем управления при релейных измерениях

8.1.1. Постановка задач

Часто в системах автоматического управления измерительные устройства имеют на выходе дискретный сигнал. Наличие дискретных измерений объясняется недостаточными знаниями о физической природе объектов управления. В частности, в экспертных системах и в алгоритмах управления системами с нечеткой логикой (fuzzy logic) обычно оперируют понятиями типа «лучше»–«хуже», «да»–«нет», которые имеют ключевую природу. При этом качество синтезируемых регуляторов в таких системах напрямую связано с количеством описания соответствий вход–выход. К классу систем с дискретными выходными воздействиями можно также отнести широкий класс задач управления, если учесть, что технически невозможно реализовать непрерывные сигналы из-за конечной разрешающей способности датчиков и генераторов сигналов. В частности, это замечание относится к синтезу систем управления на основе ЭВМ в силу квантования сигналов в таких системах по уровню, если рассматривать поведение системы в малой окрестности дискретного перехода выходного сигнала [27].

К частному случаю дискретных измерений относятся также релейные датчики. Широкое использование релейных датчиков с двухуровневыми сигналами типа «больше»–«меньше» [49] объясняется, с одной стороны, простотой их реализации, надежностью и меньшей стоимостью по сравнению с непрерывными измерительными устройствами. В то же время измерения посредством релейных датчиков вызывают ряд трудностей при синтезе алгоритмов управления. В частности, определение выходной величины только по знаку не позволяет непосредственно использовать методы адаптации и идентификации на основе теории асимптотических наблюдателей состояний и динамических компенсаторов. Естественно, возникает вопрос: можно ли на основании конечного числа дискретных измерений получить полную информацию о непрерывном векторе состояний объекта управления, необходимую для эффективного решения задач управления, в частности, задачи стабилизации?

В данном разделе предлагаются следующие пути решения:

– выделение класса линейных систем, для которых можно свести задачу к стандартной постановке, восстановив непрерывные значения выходных переменных по релейным измерениям. Тогда задача оценивания переменных состояния системы решается с помощью наблюдателя состояния, по переменным которого синтезируется стабилизирующая обратная связь. Для восстановления непрерывных значений измеряемых переменных в параграфе 8.1.2 предложен аппаратный способ, подразумевающий доработку объекта управления;

– в параграфе 8.1.3 разработаны рекуррентные алгоритмы восстановления начальных условий по релейным измерениям, которые применяются к разомкнутой системе;

– в параграфе 8.1.4 выделяется класс линейных систем, для которых возможно решение задачи стабилизации при непосредственном замыкании обратной связи по релейным измерениям;

– в параграфе 8.1.5 предложено решение задачи стабилизации линейных систем с релейными измерениями при наличии запаздывания с созданием эффекта вибролинеаризации релейных элементов.

8.1.2. Аппаратный способ

Рассмотрим линейную динамическую систему управления с релейными измерениями вида

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y_1 = Dx, \quad y_{1d} = \text{sign}y_1, \quad (8.1)$$

где $x \in R^n$; $u \in R^p$; $y_1, y_{1d} \in R^m$ – векторы состояния, управляющих воздействий и выходных переменных, соответственно. Без ограничения общности предполагается, что $\dim y_1 = \text{rank}D = m$. В качестве измерений принимаются двухуровневые сигналы релейных датчиков y_{1d} . Ставится задача стабилизации системы (8.1) в предположениях об управляемости пары матриц $\{A, B\}$ и наблюдаемости пары $\{D, A\}$.

В данном разделе обсуждаются возможности восстановления непрерывных значений компонент вектора состояния линейной системы при релейных измерениях выходных переменных (8.1), которые можно рассматривать как рекомендации по доработке объектов управления.

Используя идею работы [38], приведем аппаратный способ восстановления непрерывного выходного сигнала по его релейным измерениям, который заключается в доработке системы управления и аппаратном введении в контур обратной связи дополнительной динамической подсистемы вида

$$\dot{z}_1 = M \text{sign}(y_1 - z_1), \quad z_1 \in R^m, \quad (8.2)$$

выход которой с отрицательным знаком подается на сумматор, устанавливаемый перед разрывным элементом дискретного датчика. С учетом (8.1)–(8.2) уравнение относительно невязок $\varepsilon_1 = y_1 - z_1$, $\varepsilon_1 \in R^m$ примет вид

$$\dot{\varepsilon}_1 = \dot{y}_1 - M \text{sign}\varepsilon_1 = DAx + DBu - M \text{sign}\varepsilon_1. \quad (8.3)$$

Тогда при достаточно большой амплитуде $M > \|\dot{y}_1\| = \|DAx + DBu\|$ в системе (8.3) за конечное время возникнет скользящее движение по плоскости $\varepsilon_1 = 0$, и переменная $z_1(t) = y_1(t)$ даст оценку непрерывных значений вектора выходных переменных системы (8.1). Таким образом, при подсоединении системы (8.2) задачу наблюдения компонент вектора состояния системы (8.1) можно свести к стандартной постановке, а именно: в контур обратной связи ввести наблюдатель состояния

$$\dot{z} = Az + Bu + L(z_1 - y_z), \quad (8.4)$$

где $y_z = Dz$, $y_z \in R^m$, $z \in R^n$ – вектор состояния наблюдателя, по которому формируется обратная связь $u = U(z)$. Вектор состояния наблюдателя асимптотически сходится к вектору со-

стояния системы (8.1), $\lim_{t \rightarrow \infty} z = x$. Темпы сходимости определяются выбором L – матрицы при корректирующих воздействиях,

На рис. 8.1 представлена блок-схема приведенного выше алгоритма. Заметим, что описанная схема является дифференциатором выходного сигнала, реализованным на скользящих режимах с достаточно большой амплитудой разрывных сигналов M .

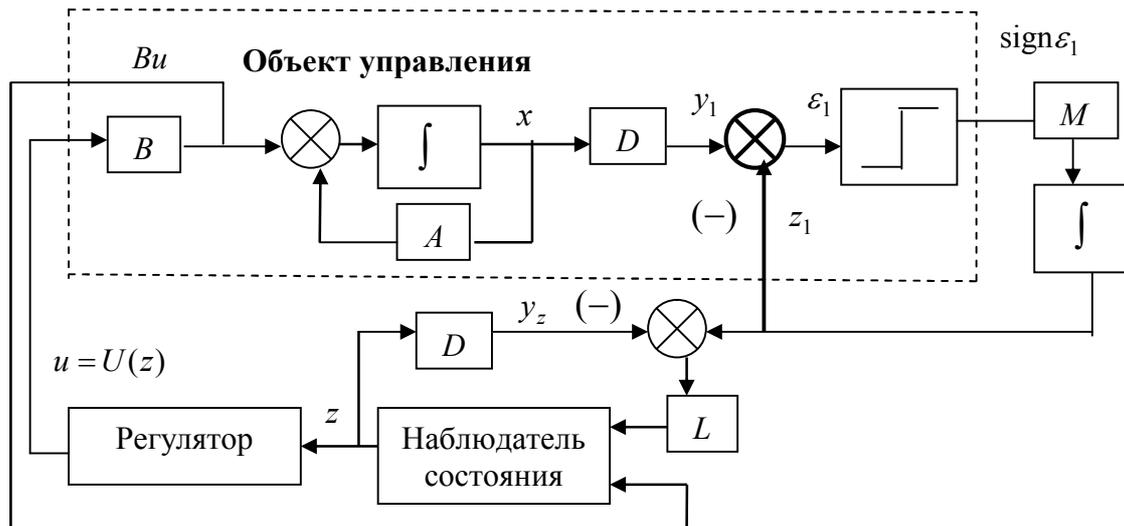


Рис. 8.1. Схема аппаратной доработки

Известно, что с ростом амплитуды увеличиваются высокочастотные автоколебания (чаттеринг) при движении изображающей точки по плоскости скольжения. В частности, по этой причине непосредственного дифференцирования стараются избегать на практике. Решить проблему чаттеринга можно в принципе несколькими способами. Первый состоит в увеличении частоты переключений разрывных сигналов. Этот путь в данном случае алгоритмически не разрешим, поскольку частота переключений определяется характеристиками реальных релейных датчиков. Второй способ состоит в уменьшении амплитуды разрывов. В данном случае теоретически удастся добиться использования сколь угодно малых амплитуд разрывных сигналов. И, наконец, третий способ состоит в фильтрации сигналов z_1 с помощью высокочастотного фильтра – путь, который используется в данной работе при синтезе наблюдателя с разрывными корректирующими воздействиями. Несмотря на то, что в данной работе стохастическая постановка не рассматривается, отметим, что наблюдатель (8.4) имеет структуру фильтра Калмана и, вообще говоря, речь в принципе может идти об оптимальной фильтрации.

Вторая проблема возникает при решении задачи синтеза наблюдателя (8.4) (выбор коэффициентов матрицы L , $\dim L = n \times n$), размерность которой совпадает с размерностью исходной системы, что приводит к известным вычислительным трудностям в многомерном случае. Покажем, как описанная схема аппаратной доработки системы управления может быть использована для построения каскадного наблюдателя состояния, позволяющего декомпозировать задачу синтеза наблюдателя высокой размерности на независимо решаемые подзадачи меньшей размерности.

Сначала рассмотрим частный случай, когда показатель наблюдаемости системы (8.1) $\nu = 2$, вектор индексов наблюдаемости $(m, n - m)$, где $m \geq n - m$, что позволяет представить систему (8.1) в блочно-наблюдаемой форме, состоящей из двух блоков:

$$\dot{y}_1 = A_{11}y_1 + A_{12}y_2 + B_1u, \quad \dot{y}_2 = A_{21}y_1 + A_{22}y_2 + B_2u, \quad (8.5)$$

где $y_1 \in R^m$, $\text{rank} A_{12} = \dim y_2 = n - m$. На основе представления системы (8.1) в виде (8.5) построим блочный наблюдатель:

$$\dot{z}_1 = A_{11}z_1 + A_{12}z_2 + B_1u + v_1, \quad \dot{z}_2 = A_{21}z_1 + A_{22}z_2 + B_2u + L_2v_1, \quad (8.6)$$

где $z_1 \in R^m$, $z_2 \in R^{n-m}$, $v_1 \in R^m$ – корректирующее воздействие наблюдателя. С учетом (8.5)–(8.6) запишем систему уравнений относительно невязок $\varepsilon = y - z$ в предположении, что каналы действия управления u на объект известны:

$$\dot{\varepsilon}_1 = A_{11}\varepsilon_1 + A_{12}\varepsilon_2 - v_1, \quad \dot{\varepsilon}_2 = A_{21}\varepsilon_1 + A_{22}\varepsilon_2 - L_2v_1. \quad (8.7)$$

Подача на систему (8.7) разрывного корректирующего воздействия $v_1 = M_1 \text{sign} \varepsilon_1$ приведет к возникновению за конечное время t_1 скользящего режима по поверхности $\varepsilon_1 = 0 \Rightarrow y_1 = z_1$, порядок системы искусственным образом понижается, и в скользящем режиме (согласно методу эквивалентного управления ($\dot{\varepsilon}_1 = 0 \Rightarrow v_{1\text{eq}} = A_{12}\varepsilon_2$)), поведение замкнутой системы описывается уравнением медленных движений: $\dot{\varepsilon}_2 = A_{22}\varepsilon_2 - L_2v_{1\text{eq}}$ или

$$\dot{\varepsilon}_2 = (A_{22} - L_2A_{12})\varepsilon_2. \quad (8.8)$$

В системе (8.8) при соответствующем выборе матрицы L_2 обеспечивается асимптотическая стабилизация переменных $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_2 = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} z_2 = y_2$. По переменным наблюдателя (8.6) z_1, z_2 в системе (8.1) формируется стабилизирующая обратная связь.

В отличие от наблюдателя (8.4), в предложенном алгоритме задача синтеза корректирующих воздействий наблюдателя состояния (8.6) декомпозируется на две независимо решаемых подзадачи:

1) выбор амплитуды разрывных управлений на основе неравенства $\varepsilon_1^T \dot{\varepsilon}_1 < 0 \Rightarrow M_1 > \|A_{11}\varepsilon_1 + A_{12}\varepsilon_2\|$. Существенно, что на данном этапе допускается отсутствие точной информации о коэффициентах матриц A_{11}, A_{12} . При наличии точной информации о коэффициентах матрицы B возможно уменьшение амплитуды разрывных управлений $M_1 < M$ по сравнению с системой (8.3);

2) выбор матрицы L_2 , $\dim L_2 = (n - m) \times (n - m)$, связанный с решением задачи назначения собственных чисел в системе (8.8). Существенно, что размерности данной задачи (требуется назначить $(n - m)$ собственных чисел) меньше, чем в первом способе, где посредством выбора коэффициентов матрицы $\dim L = n \times n$ требуется назначить n собственных чисел. На данном этапе требуется информация о коэффициентах матриц A_{22}, A_{12} .

Особенностью описанного алгоритма для частного случая, когда показатель наблюдаемости $\nu = 2$ (см. раздел 2.2) является отсутствие дополнительных фильтров для непосредственного получения значений $v_{1\text{eq}}$. В то же время установка таких фильтров позволит упростить задачу синтеза во втором блоке системы (8.6) и, кроме того, появится возможность минимизации значения амплитуды M_1 в реальном времени. Рассмотрим такой алгоритм для общего случая, когда модель объекта управления (8.1) приводится к блочно-наблюдаемой форме, состоящей из ν блоков,

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^i A_{ij} y_j + A_{i,i+1} y_{i+1}, \quad i = \overline{1, \nu-1}; \quad \dot{y}_\nu = \sum_{j=1}^{\nu} A_{ij} y_j,$$

где $\dim y_{i+1} = \text{rank} A_{i,i+1} = m_{i+1}$, $\sum_{i=1}^{\nu} m_i = n$, m_i – индексы наблюдаемости, $\nu \geq 2$ – показатель наблюдаемости. Построим соответствующий блочный наблюдатель состояния

$$\dot{z}_i = \sum_{j=1}^i A_{ij} z_j + A_{i,i+1} z_{i+1} + v_i, \quad i = \overline{1, \nu},$$

где $A_{i,\nu+1} = 0$, $\dim z_i = \dim y_i = \dim v_i = m_i$, с разрывными корректирующими воздействиями $v_1 = M_1 \text{sign} \varepsilon_1$, $v_i = M_i \text{sign}(A_{i-1,i}^+ v_{(i-1)\text{eq}})$, $i = \overline{2, \nu}$. В системе, записанной в невязках $\varepsilon_i = y_i - z_i$, $\varepsilon_i \in R^{m_i}$, $\dot{\varepsilon}_i = \sum_{j=1}^i A_{ij} \varepsilon_j + A_{i,i+1} \varepsilon_{i+1} - v_i$, $i = \overline{1, \nu}$, решается задача стабилизации за теоретически конечное время, при $M_i > \|A_{i,i+1} \varepsilon_{i+1}\|$ в каждом блоке последовательно обеспечиваются соотношения $\varepsilon_i = 0$, $\dot{\varepsilon}_i = 0 \Rightarrow v_{i\text{eq}} = A_{i,i+1} \varepsilon_{i+1}$ (см. параграф 2.3.2). Значения эквивалентных управлений получают с выхода фильтров первого порядка $\mu_i \dot{\tau}_i = -\tau_i + v_i$, $\mu_i \rightarrow 0 \Rightarrow \tau_i \rightarrow v_{i\text{eq}}$, $i = \overline{1, \nu}$, что позволяет минимизировать амплитуды разрывных корректирующих воздействий в скользящем режиме: $M_i = \|v_{i\text{eq}}\| + \alpha_i$, $i = \overline{1, \nu}$, где α_i – постоянные положительные, сколь угодно малые величины.

Предложенные аппаратные схемы решения задачи оценивания непрерывных значений выходных переменных y_1 подразумевают доработку объекта управления, что не всегда реализуемо на практике. Покажем, что аналогичные результаты можно получить в системе с использованием метода расширения пространства состояния при дополнительных непрерывных измерениях.

Пример 8.1. Рассмотрим задачу стабилизации динамической системы второго порядка, состоящую из двух последовательно соединенных интеграторов

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = u(t), \quad (8.9)$$

в предположении, что измеряется только знак первой переменной $y_{1d} = \text{sign} x_1(t)$ и непрерывный сигнал $y_2 = x_2(t)$. Традиционные способы синтеза посредством наблюдателя состояний для такой системы неприемлемы, поскольку система (8.9) не наблюдаема относительно непрерывных измерений y_2 . Для системы (8.9) введем неособую замену переменных в виде $\bar{x}_2(t) = x_2(t) - z(t)$, где уравнением

$$\mu \dot{z}(t) = -z(t) - M_1 \text{sign} x_1(t) \quad (8.10)$$

описывается динамический компенсатор (фильтр первого порядка). За счет уравнения (8.10) общий порядок системы управления увеличивается. При $\mu \rightarrow 0$ система (8.10) становится сингулярно возмущенной [5], быстрые движения которой устойчивы, а из уравнения медленных движений для любого конечного интервала времени $t \in [t_0, t_0 + T]$ следует, что

$$z(t) = -M_1 \operatorname{sign} x_1(t) + O_1 z(\tau) + O_2(\mu, t), \quad (8.11)$$

где $\lim_{\mu \rightarrow 0} O_2(\mu, t) = 0$, $\lim_{\tau \rightarrow \infty} O_1 z(\tau) = 0$, $t = \mu\tau$. С практической точки зрения такая замена, так же, как и в аппаратном способе, подразумевает фильтрацию релейного сигнала с малой постоянной времени μ . В новых переменных (x_1, z, \bar{x}_2) система (8.9) примет вид

$$\dot{x}_1(t) = z(t) + \bar{x}_2(t), \quad (8.12)$$

$$\dot{\bar{x}}_2(t) = [-z(t) - M_1 \operatorname{sign} x_1(t)] / \mu + u(t). \quad (8.13)$$

Сформировав управление в виде $u = (z + M_1 \operatorname{sign} x_1) / \mu - k_2 \bar{x}_2$, получим замкнутую систему (8.13) $\dot{\bar{x}}_2(t) = -k_2 \bar{x}_2(t)$, в которой при $k_2 > 0$ обеспечивается стабилизация переменной $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}_2 = 0 \Rightarrow x_2(t) \rightarrow z(t)$ с желаемыми темпами. Тогда с учетом (8.11) уравнение (8.12) принимает вид

$$\dot{x}_1(t) = -M_1 \operatorname{sign} x_1(t) + O_1 z(\tau) + O_2(\mu, t). \quad (8.14)$$

При выполнении условия существования скользящего режима $M_1 > |O_1 z(\tau) + O_2(\mu, t)|$ в системе (8.14) возникает скользящий режим по поверхности $x_1 = 0$, и стабилизация релейно измеряемой переменной x_1 обеспечивается за конечное время.

В случае, когда аппаратный способ нельзя реализовать и/или возможность дополнительных непрерывных измерений отсутствует, попытаемся решить эту задачу, используя только релейный выход системы (8.1). Вообще говоря, задачу наблюдения можно трактовать как задачу восстановления начальных условий в системе (8.1) и именно такая трактовка задачи наблюдения рассматривается в следующем параграфе.

8.1.3. Восстановление начальных условий по релейным измерениям

Рассмотрим тривиальный частный случай линейных динамических объектов с устойчивыми собственными движениями, т.е. в системе (8.1) спектр матрицы A целиком расположен в левой полуплоскости комплексной плоскости. Тогда решение задачи стабилизации не требует никаких измерений, если в замкнутый контур ввести модель объекта управления вида

$$\dot{z} = Az + Bu. \quad (8.15)$$

Вектор состояний модели объекта управления $z \in R^n$ (при произвольных начальных условиях) служит оценкой вектора состояний объекта управления, так как уравнение в невязках $\dot{\varepsilon} = A\varepsilon$, $\varepsilon = x - z$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon = 0$ является устойчивым. Стабилизирующая обратная связь $u = U(z)$ формируется из непрерывных компонент модели объекта управления (8.15), которые известны и асимптотически сходятся к компонентам вектора состояний объекта, $\lim_{t \rightarrow \infty} z = x$. Практическое

использование такого подхода к оценке вектора состояний ограничено невозможностью повлиять на темпы сходимости невязок. Заметим, что если бы мы располагали информацией о начальных условиях системы (8.1), то установка таких же начальных условий в модель (8.15) позволила бы непосредственно получить значения непрерывных компонент вектора состояния в

реальном времени $z = x$, в том числе и при неустойчивых собственных движениях системы (8.1).

С учетом вышесказанного для системы (8.1) ставится задача аналитического определения начальных условий по релейным измерениям. Предлагаемые ниже подходы к синтезу систем управления с релейными измерениями могут быть использованы для объектов, оператор которых точно известен.

Сначала рассмотрим частный случай, когда выход системы (8.1) скалярный: $m = 1$, $y_1 = dx$, $d = (d_1, \dots, d_n)$.

Теорема 8.1. Пусть в линейной динамической n -мерной системе вида (8.1) со скалярным выходом $y_1 = dx$ оператор объекта управления известен и пара $\{d, A\}$ – наблюдаема. Тогда для определения вектора начальных условий $\text{col}(x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0))$ необходимо и достаточно зафиксировать n переключений релейного датчика $y_{1d} = \text{sign}y_1$.

Доказательство теоремы 8.1. Применительно к системе (8.1) со скалярным выходом введем неособое преобразование координат $x = G\tilde{x}$, где матрица $G = (g_1, \dots, g_n)$ состоит из столбцов $g_j \neq 0$, $g_j \in R^n$, $j = \overline{1, n}$, которые являются собственными векторами матрицы A и удовлетворяют условию

$$Ag = \lambda g. \quad (8.16)$$

В выражении (8.16) число λ – собственное значение матрицы A , отвечающее собственному вектору g и являющееся корнем характеристического уравнения $\det(A - \lambda I) = 0$. Будем предполагать, что все собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ матрицы A действительны и различны. В этом случае собственные векторы g_1, g_2, \dots, g_n линейно независимы, следовательно, $\det G \neq 0$ и обратная матрица G^{-1} существует, поэтому векторы $x \in X \subset R^n$ и $\tilde{x} \in \tilde{X} \subset R^n$ связаны однозначной зависимостью, в частности $x(0) = G\tilde{x}(0)$. Таким образом, задачи о наблюдаемости в пространствах X и \tilde{X} эквивалентны. В пространстве новых переменных $\tilde{x} = G^{-1}x$ поведение системы (8.1) описывается уравнением $\dot{\tilde{x}} = G^{-1}AG\tilde{x} + G^{-1}Bu$ или с учетом равенства (8.16) $AG = GA$:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + G^{-1}Bu, \quad (8.17)$$

где $A = G^{-1}AG = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ или $\dot{\tilde{x}}_i = \lambda_i \tilde{x}_i + b_{gi}u$, $i = \overline{1, n}$, b_{gi} – i -ая строка матрицы $G^{-1}B$. Тогда

решение системы (8.1) относительно скалярного выхода можно представить в виде $y_1 = dx = dG\tilde{x} = q\tilde{x}$, где $q = dG$, $q = (q_1, \dots, q_n)$, $q_i = dg_i$ или

$$y_1(t) = \sum_{i=1}^n q_i (\tilde{x}_i(0)e^{\lambda_i t} + \psi_i(t)), \quad (8.18)$$

где $\psi_i(t) = \int_0^t e^{\lambda_i(t-\xi)} b_{gi}u(\xi) d\xi$ – вынужденные составляющие. Введем в контур обратной связи наблюдатель состояния, модель которого аналогична преобразованной системе (8.17)

$$\dot{z} = Az + G^{-1}Bu, \quad (8.19)$$

с вектором состояния $z \in R^n$, произвольными начальными условиями $z(0) = \text{col}(z_1(0), \dots, z_n(0))$ и выходом

$$y_{z1}(t) = \sum_{i=1}^n q_i(z_i(0)e^{\lambda_i t} + \psi_i(t)). \quad (8.20)$$

С учетом (8.18), (8.20) уравнение выходных переменных, записанное относительно невязок $\varepsilon(t) = \tilde{x}(t) - z(t)$, $\varepsilon \in R^n$, принимает вид

$$\sum_{i=1}^n q_i \varepsilon_i(0) e^{\lambda_i t} = y_1(t) - y_{z1}(t), \quad (8.21)$$

где $\varepsilon(0) = \tilde{x}(0) - z(0)$, $\varepsilon(0) = \text{col}(\varepsilon_1(0), \dots, \varepsilon_n(0))$, $\tilde{x}(0) = \text{col}(\tilde{x}_1(0), \dots, \tilde{x}_n(0))$.

Покажем, что наблюдаемость пары $\{d, A\}$ эквивалентна выполнению в системе (8.21) условия $\forall q_i \neq 0, i = \overline{1, n}$. С учетом равенств $d = qG^{-1}$ и $G^{-1}A^i = A^i G^{-1}$ запишем условия наблюдаемости Калмана (1.2) в виде

$$N = \begin{pmatrix} d \\ dA \\ \vdots \\ dA^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qG^{-1} \\ qG^{-1}A \\ \vdots \\ qG^{-1}A^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qG^{-1} \\ qAG^{-1} \\ \vdots \\ qA^{n-1}G^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ qA \\ \vdots \\ qA^{n-1} \end{pmatrix} G^{-1} = QVG^{-1},$$

где $Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & q_n \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ & & \dots & \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$ – определитель Вандермонда, $\det N =$

$= \det Q \det V \det G^{-1}$. Поскольку $\det V \neq 0$ [3], $\det G^{-1} \neq 0$, постольку для выполнения условия наблюдаемости $\det N \neq 0$ требуется выполнение условия $\det Q = q_1 q_2 \dots q_n \neq 0$, т.е. $\forall q_i \neq 0, i = \overline{1, n}$. В противном случае система является ненаблюдаемой, т.е. если хотя бы одно $q_i = 0$, то соответствующая экспонента $e^{\lambda_i t}$ в наблюдении отсутствует, и координату восстановить невозможно. С геометрической точки зрения факт отсутствия наблюдаемости означает, что вектор d и один из собственных векторов матрицы A ортогональны, $q_i = 0 \Leftrightarrow dg_i = 0$.

С физической точки зрения в системе (8.1) имеется только информация о моментах времени переключения релейного датчика, т.е. пересечения выходными переменными нуля. Тогда в моменты времени $t_j, j = \overline{1, n}$ выходы $y_1(t_j) = 0, y_{z1}(t_j)$ – известные величины. Зафиксировав n переключений, можно записать систему из n алгебраических неоднородных уравнений с n неизвестными начальными условиями $\varepsilon(0)$:

$$A_q \varepsilon(0) = -Y_{z1}, \quad (8.22)$$

где $Y_{z1} = \text{col}(y_{z1}(t_1), \dots, y_{z1}(t_n))$,

$$A_q = \begin{pmatrix} q_1 e^{\lambda_1 t_1} & q_2 e^{\lambda_2 t_1} & \dots & q_{n-1} e^{\lambda_{n-1} t_1} & q_n e^{\lambda_n t_1} \\ q_1 e^{\lambda_1 t_2} & q_2 e^{\lambda_2 t_2} & \dots & q_{n-1} e^{\lambda_{n-1} t_2} & q_n e^{\lambda_n t_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_1 e^{\lambda_1 t_{n-1}} & q_2 e^{\lambda_2 t_{n-1}} & \dots & q_{n-1} e^{\lambda_{n-1} t_{n-1}} & q_n e^{\lambda_n t_{n-1}} \\ q_1 e^{\lambda_1 t_n} & q_2 e^{\lambda_2 t_n} & \dots & q_{n-1} e^{\lambda_{n-1} t_n} & q_n e^{\lambda_n t_n} \end{pmatrix}.$$

Так как $\forall q_i \neq 0$, собственные числа λ_i и моменты времени t_j различны, то матрица $\dim A_q = n \times n$ состоит из линейно независимых рядов, $\text{rank} A_q = n$, $\det A_q \neq 0$, и обратная матрица A_q^{-1} существует. Следовательно, система (8.22) имеет единственное решение $\varepsilon(0) = -A_q^{-1} Y_{z1}$, откуда однозначно определяются начальные условия преобразованной системы (8.17): $\tilde{x}(0) = \varepsilon(0) + z(0)$. Необходимость n переключений следует из того факта, что при меньшем числе переключений $k < n$ $\text{rank} A_q = k < n$; система (8.22) не определена, т.е. имеет бесчисленное множество решений. Достаточность следует из того факта, что при большем числе переключений ($k > n$) $\dim A_q = k \times n$, $\text{rank} A_q = n$. Теорема доказана.

Пример 8.2. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\dot{x}_1 = 3x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = 2x_1 + 2x_2 + u \quad (8.23)$$

со скалярным выходом $y_1 = 2x_1 - x_2$, $d = (2, -1)$ и релейным измерением $y_{1d} = \text{sign} y_1$. Из характеристического уравнения системы (8.23)

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

находим собственные числа $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 1$, при последовательной подстановке которых в выражение (8.16) находим собственные векторы $g_1 = \text{col}(1 \ 1)$, $g_2 = \text{col}(1 \ -2)$. Из выражения $q_i = d g_i$ находим $q_1 = 1$, $q_2 = 4$. Заметим, что система (8.23) наблюдаема относительно выходных переменных. Запишем систему (8.22) из двух алгебраических неоднородных уравнений с двумя неизвестными начальными условиями $\varepsilon(0)$

$$\begin{pmatrix} e^{4t_1} & 4e^{t_1} \\ e^{4t_2} & 4e^{t_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1(0) \\ \varepsilon_2(0) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} y_z(t_1) \\ y_z(t_2) \end{pmatrix},$$

решение которой имеет вид

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1(0) \\ \varepsilon_2(0) \end{pmatrix} = - \frac{1}{4(e^{4t_1+t_2} - e^{t_1+4t_2})} \begin{pmatrix} 4e^{t_2} & -4e^{t_1} \\ -e^{4t_2} & e^{4t_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_z(t_1) \\ y_z(t_2) \end{pmatrix}.$$

Продолжим решение поставленной задачи. Полученные с помощью выражения (8.22) на-

чальные условия подставляем в уравнения

$$\tilde{x}_i = \tilde{x}_i(0)e^{\lambda_i t} + \psi_i(t), \quad i = \overline{1, n} \quad (8.24)$$

(которые назовем упредителем состояния), что позволяет рассчитать текущее состояния объекта управления на момент времени $t = t_n + t_p$, где t_p – время выполнения вычислений. Подстановка полученных значений $\tilde{x}(t_n + t_p)$ в модель (8.19) позволяет получить непрерывные значения вектора состояния $x(t) = G\tilde{x}(t) = Gz(t)$, которые служат для формирования стабилизирующих управляющих воздействий $u = U(Gz)$, начиная с момента времени $t_u \geq t_n + t_p$. Структурная схема данного алгоритма представлена на рис. 8.2.

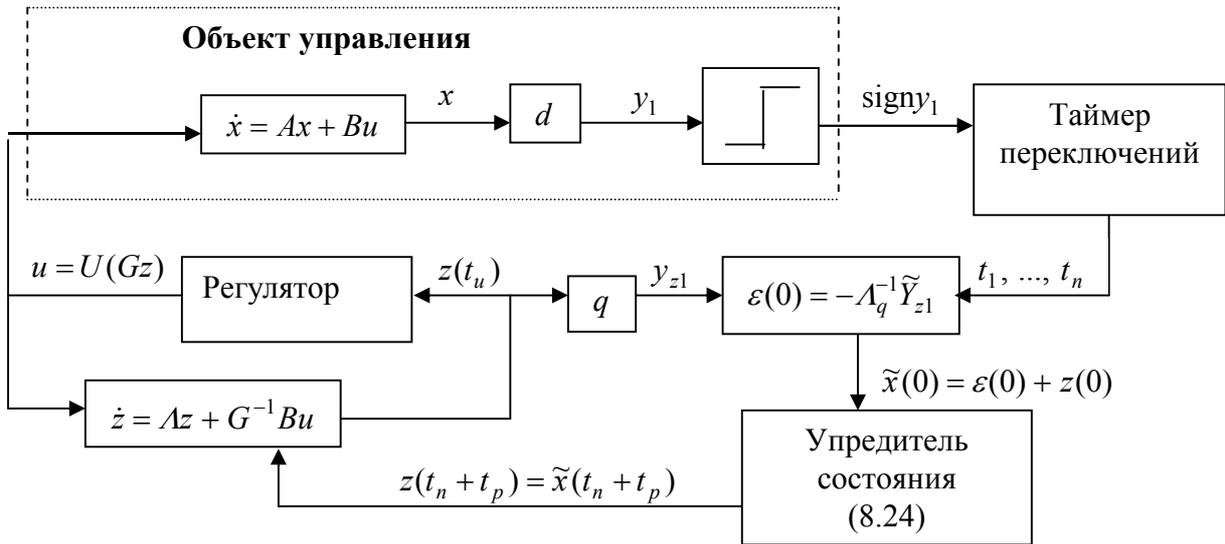


Рис. 8.2. Структурная схема замкнутой системы с упредителем состояния

Замечание 8.1. Чтобы избежать накопления ошибки вычисления, описанный алгоритм целесообразно повторять при каждом новом переключении релейного датчика на интервалах $[t_1, t_{n+1}]$, $[t_2, t_{n+2}]$, ..., $[t_k, t_{n+k}]$, ... в моменты t_{n+k} , если $y_{z1}(t_{n+k}) \neq y_1(t_{n+k}) = 0$, определяя состояние объекта на момент $\tilde{x}(t_k)$ и переустанавливая текущее состояние наблюдателя $z(t_{n+k} + t_p) = \tilde{x}(t_{n+k} + t_p)$ (8.24), (8.19).

Другая ситуация складывается при векторных измерениях, когда в системе (8.1) $y_1 = Dx$, $\dim y_1 = \text{rank} D = m$, $1 < m < n$, $y_{1d} = \text{sign} y_1$, где $y_{1k}(t) = \sum_{i=1}^n q_{ki}(\tilde{x}_i(0)e^{\lambda_i t} + \psi_i(t))$, $k = \overline{1, m}$, $q_{ki} = d_k g_i$, d_k – k -я строка матрицы D . Здесь по аналогии со скалярным случаем система наблюдаема, если матрица DG не содержит нулевых столбцов.

В случае векторных измерений m релейных датчиков переключаются в произвольном порядке, и после n произвольных переключений ($y_{1\alpha}(t_1) = 0$, $y_{1\beta}(t_2) = 0$, ..., $y_{1\gamma}(t_n) = 0$) в системе уравнений (8.22) матрица A_q ($\dim A_q = n \times n$) принимает вид

$$\Lambda_q = \begin{pmatrix} q_{\alpha 1} e^{\lambda_1 t_1} & q_{\alpha 2} e^{\lambda_2 t_1} & \dots & q_{\alpha n-1} e^{\lambda_{n-1} t_1} & q_{\alpha n} e^{\lambda_n t_1} \\ q_{\beta 1} e^{\lambda_1 t_2} & q_{\beta 2} e^{\lambda_2 t_2} & \dots & q_{\beta n-1} e^{\lambda_{n-1} t_2} & q_{\beta n} e^{\lambda_n t_2} \\ & & \dots & & \\ q_{\gamma 1} e^{\lambda_1 t_n} & q_{\gamma 2} e^{\lambda_2 t_n} & \dots & q_{\gamma n-1} e^{\lambda_{n-1} t_n} & q_{\gamma n} e^{\lambda_n t_n} \end{pmatrix}.$$

В частном случае, когда матрица DG не содержит нулевых элементов, порядок переключения не важен, поскольку при $\forall \alpha, \beta, \dots, \gamma \text{ rank } \Lambda_q = n$, и система (8.22) имеет единственное решение. В противном случае, если после n переключений $\text{rank } \Lambda_q < n$, то следует фиксировать следующие переключения до момента времени $t_{k_1} > t_n$, пока не наберется базисной минор матрицы Λ_q ($\dim \Lambda_q = k_1 \times n$) размерности $n \times n$. Таким образом, только в момент времени t_{k_1} начальные условия системы (8.22) определяются однозначно и, начиная с момента времени $t_u \geq t_{k_1} + t_p$ определяются непрерывные значения компонент вектора состояний (8.24), (8.19), из которых формируется стабилизирующая обратная связь.

В заключение раздела заметим, что описанные алгоритмы решения задачи оценивания вектора состояния, которые применяются к разомкнутой системе, могут оказаться неприемлемыми на практике из-за непредсказуемо большого времени оценивания, в частности, необходимое число переключений выходных сигналов вообще может не произойти. Интуитивно ясно, что удовлетворительное решение задачи оценивания и синтеза обратной связи в задаче управления может быть найдено при совместном рассмотрении обеих задач. Более конкретно, требуется организовать с самого начала обратную связь так, чтобы она включала в себя вибролинеаризующий высокочастотный сигнал, обеспечивающий высокую частоту переключений релейных выходных переменных. При этом, с одной стороны, амплитуда этих высокочастотных сигналов должна быть достаточно большой, чтобы получить непрерывную оценку значений выходных переменных, а с другой стороны, в установившемся режиме амплитуда вибролинеаризующего сигнала должна быть достаточно малой исходя из требования, например, стабилизации выходных переменных. Такие возможности открываются в системах с разрывными управлениями с изменяемой амплитудой, в которых частота переключений в скользящем режиме стремится к бесконечности. В следующем параграфе выделяется класс линейных систем, для которых имеется возможность непосредственного решения задачи стабилизации выходных переменных по релейным значениям с помощью обратной связи по выходу.

8.1.4. Непосредственное замыкание обратной связи по релейным измерениям

В данном параграфе предложен новый подход, заключающийся в совместном решении задач наблюдения и стабилизации систем с релейными измерениями. Выделен класс систем, для которых непосредственное замыкание релейной обратной связи по выходным переменным приводит к возникновению в замкнутых системах скользящих режимов и, как следствие, решается задача стабилизации всех или некоторых выходных переменных. Получены ранговые условия решения данной задачи, которые могут служить рекомендациями при конструировании технических систем.

Пусть в системе (8.1) $\text{rank } D = m_1$, $\text{rank } B = p$, $\text{rank } DB = p_1$, $0 < p_1 \leq m_1$. С помощью неособой замены переменных $x \rightarrow \text{col}(y, x_0)$, где $y \in R^{p_1}$ (если $p_1 = m_1$, то $y = y_1$, если $p_1 < m_1$, то $y_1 = \text{col}(y, y_2)$), y – укороченный вектор выходных переменных и часть измерений $y_2 \in R^{m_1 - p_1}$

для данного алгоритма является избыточной), $x_0 \in R^{n-p_1}$ систему (8.1) можно представить в виде двух подсистем:

$$\dot{y} = A_{11}y + A_{10}x_0 + B_{11}u_1 + B_{10}u_0, \quad \dot{x}_0 = A_{01}y + A_{00}x_0 + B_{01}u_1 + B_{00}u_0, \quad (8.25)$$

где $y_d = \text{sign}(y)$, $u = \text{col}(u_1, u_0)$, $u_1 \in R^{p_1}$, $\det B_{11} \neq 0$, $u_0 \in R^{p-p_1}$. Введем неособую замену переменных $B_{11}u_1 = -B_{10}u_0 + v_1$, $v \in R^{p_1}$, с учетом которой система (8.25) принимает вид

$$\dot{y} = A_{11}y + A_{10}x_0 + v_1, \quad (8.26)$$

$$\dot{x}_0 = A_{01}y + A_{00}x_0 + B_{01}B_{11}^{-1}v_1 + (B_{00} - B_{01}B_{11}^{-1}B_{10})u_0. \quad (8.27)$$

Сформируем в блоке (8.26) управление в виде разрывных функций

$$v_1 = -M \text{sign}y = -My_d \quad (8.28)$$

с амплитудой $M > \|A_{11}y + A_{10}x_0\|$, что приводит к возникновению скользящего режима по многообразию $y = 0$. Таким образом, за конечное время решается задача стабилизации выходных переменных (или их части) y . Поведение системы (8.26) в скользящем режиме в соответствии с методом эквивалентного управления описывается уравнениями

$$v_{\text{leq}} = -A_{10}x_0, \quad (8.29)$$

$$\dot{x}_0 = (A_{00} - B_{01}B_{11}^{-1}A_{10}^{-1})x_0 + (B_{00} - B_{01}B_{11}^{-1}B_{10})u_0. \quad (8.30)$$

В частном случае, если исходная система (8.1) наблюдаема относительно укороченного выхода y и показатель наблюдаемости $\nu = 2$, то $\text{rank} A_{10} = \dim x_0 = n - p_1$. Тогда выражение (8.29) служит непосредственной оценкой неизмеряемых переменных

$$x_0 = -A_{10}^+ v_{\text{leq}}, \quad (8.31)$$

по которой желаемым образом можно сформировать стабилизирующую обратную связь в блоке (8.28): $u_0 = U_0(v_{\text{leq}})$ (если переменные блока (8.28) управляемы относительно укороченного вектора управления u_0). В другом частном случае $p_1 = p$ в блоке (8.30) управление отсутствует и $\dot{x}_0 = (A_{00} - B_{01}B_{11}^{-1}A_{10})x_0$. Тогда техническими требованиями решения задачи является стабилизируемость переменных x_0 , т.е. спектр матрицы $A_{00} - B_{01}B_{11}^{-1}A_{10}$ должен находиться в левой полуплоскости комплексной плоскости, но темпы сходимости $\lim_{t \rightarrow \infty} x_0 = 0$ не могут быть выбраны произвольным образом.

В общем случае ($\nu > 2$ и $p_1 < p$) для стабилизации системы (8.26)–(8.27) при непосредственном замыкании обратной связи по релейным измерениям (8.28) требуется выполнение следующих условий: 1) наблюдаемость пары $\{A_{10}, A_{00}\}$ (при $p_1 = m_1$ это следует из наблюдаемости пары $\{D, A\}$); 2) управляемость пары $\{(A_{00} - B_{01}B_{11}^{-1}A_{10}^{-1}), (B_{00} - B_{01}B_{11}^{-1}B_{10})\}$. При выполнении данных требований задача сводится к стандартной постановке и заключается в построе-

нии наблюдателя состояния укороченной системы (8.30) с вектором состояния $z_0 \in R^{n-p_1}$ (например, по блочному принципу) с фиктивным выходом (8.31), по переменным которого формируется стабилизирующая обратная связь в блоке (8.30) $u_0 = U_0(z_0)$.

В реальных системах скользящий режим будет не идеальным (в силу наличия динамических неидеальностей в операторе объекта управления и технических ограничений на частоту переключений релейных элементов), а частота переключений релейных элементов ограниченной, что приводит к автоколебаниям выходных сигналов в установившемся режиме. В этом случае следует использовать переменные амплитуды в разрывных управлениях $v_1 = -M(v_{1eq})\text{sign}y$, $x_0 \rightarrow 0 \Rightarrow M(v_{1eq}) \rightarrow 0$.

Таким образом, выделен класс линейных систем с релейными измерениями, для которого удается решить задачу стабилизации при непосредственном замыкании обратной связи по релейным измерениям. Физическая интерпретация в терминах системы (8.26)–(8.27) состоит в том, что приведенный алгоритм управления может быть применен к системам, в которых все или часть компонент вектора выходных переменных отделены одним интегрирующим звеном от соответствующих компонент вектора управления v_1 (см. рис. 8.3).

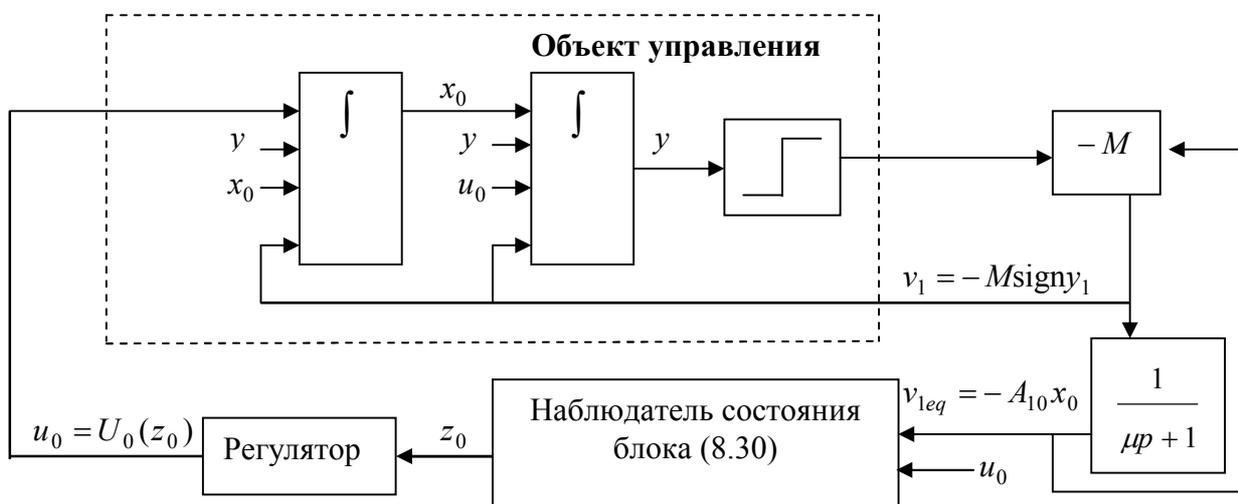


Рис. 8.3. Структурная схема замкнутой системы (8.26)–(8.27) с наблюдателем состояния

8.1.5. Стабилизация линейных систем с релейными измерениями при наличии запаздывания

Использование скользящих режимов при синтезе систем с релейными измерениями является реализацией широко известного в теории управления метода вибролинеаризации релейных элементов [6, 47], идея которого состоит в следующем. Если на входной сигнал релейного элемента наложить высокочастотный сигнал небольшой амплитуды, то в малой окрестности переключений выходной сигнал релейного элемента на низких частотах пропорционален входному сигналу датчика, причем коэффициент усиления пропорционален амплитуде высокочастотного сигнала. Вопрос о разнесении частот полезного и высокочастотного сигналов решается, как и в задаче широтно-импульсной модуляции, с помощью высокочастотного фильтра на выходе релейного элемента $\mu_f \dot{\tau} + \tau = y_{1d}(t)$. Очевидно, что при уменьшении постоянной времени фильтра выполняется условие $\mu_f \rightarrow 0 \Rightarrow \tau(t) \rightarrow y_{1dcp}(t)$, где $y_{1dcp}(t)$ представляет собой среднюю непрерывную составляющую переключений, пропорциональную входному сигналу. Таким об-

разом, метод вибролинеаризации осуществляет широтно-импульсную модуляцию входного сигнала релейного элемента в разомкнутом контуре, причем амплитуда высокочастотного сигнала должна обеспечивать высокочастотные переключения релейного элемента во всем диапазоне изменений полезного (низкочастотного) сигнала.

Использование скользящих режимов позволяет решать задачу широтно-импульсной модуляции в замкнутом динамическом контуре системы. Для наглядности снова рассмотрим блок (8.26), где в качестве полезного сигнала будем рассматривать вектор $A_{10}x_0$. Организация скользящих движений по поверхности скольжения $y = 0$ посредством разрывного управления (8.28) обеспечивает стабилизацию выходных переменных и в пределе бесконечную частоту переключений релейных элементов, при этом среднее (или эквивалентное) значение разрывных управлений, получаемое на выходе фильтра, дает оценку полезного сигнала (8.29). В случае, когда управления не входят в первый блок системы (8.25) (в терминах исходной системы $DB = 0$), использовать непосредственно скользящие режимы не представляется возможным и требуется разработка специальных алгоритмов.

Рассмотрим более подробно идею вибролинеаризации релейных элементов применительно к линейным системам с релейными измерениями при наличии запаздывания. Предварительно приведем известные схемы компенсации запаздывания для случая непрерывных измерений применительно к линейному объекту с запаздывающим аргументом по входным переменным:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t - \tau), \quad y(t) = Dx(t). \quad (8.32)$$

Известная схема синтеза систем вида (8.32) состоит в следующем [20, 58]. Для системы (8.32) строится наблюдатель состояний вида

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x}(t) + Bu(t - \tau) - L(y(t) - D\hat{x}(t)), \quad (8.33)$$

где $\hat{x} \in R^n$, L – матрица с постоянными коэффициентами соответствующей размерности. Выбор управляющих воздействий в виде

$$u(t) = F(e^{A\tau}\hat{x}(t) + \int_{-\tau}^0 e^{-A\xi} Bu(t + \xi) d\xi) \quad (8.34)$$

обеспечивает следующий вид характеристического полинома замкнутой системы (8.24) с упреждающим управлением (8.34) и наблюдателем (8.33):

$$\begin{vmatrix} pI - A & 0 & -B \exp(-p\tau) \\ LD & pI - A - LD & -B \exp(-p\tau) \\ 0 & -F \exp(A\tau) & I - F \int_{-\tau}^0 e^{(pI-A)\xi} Bd\xi \end{vmatrix}. \quad (8.35)$$

После алгебраических преобразований выражение (8.35) сводится к выражению

$$\det(pI - A - BF) \det(pI - A - LD). \quad (8.36)$$

Предположив, что пара $\{A, B\}$ – управляема, а пара $\{D, A\}$ – наблюдаема, соответствующим

выбором коэффициентов матриц F и L можно получить желаемое распределение корней характеристического полинома замкнутой системы. Трудности в реализации приведенной схемы компенсации запаздывания связаны с вычислением интеграла свертки (8.34), в частности, его

вычисление посредством следующей аппроксимации $\hat{z}(t) = \int_{-\tau-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-A\xi} Bu(t+\xi)d\xi$, $\varepsilon > 0$ на интер-

вале $[-\tau, 0]$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ приводит к появлению погрешности, которая может оказать существенное влияние на качество переходного процесса. Приведенная выше схема компенсации запаздывания за счет расширения пространства состояний обобщает известные приемы, такие как моделирование звена запаздывания динамической системой, состоящей из последовательного соединения инерционных звеньев с малыми постоянными времени [6] или компенсация запаздывания на основе упредителя Смитта [58], применимость которого ограничена классом устойчивых разомкнутых систем.

Схема компенсации запаздывания по выходным переменным аналогична случаю наличия запаздывания по входным переменным. Рассмотрим эту ситуацию применительно к системе вида

$$\text{объект управления: } \dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Dx(t - \tau), \quad (8.37)$$

$$\text{наблюдатель: } \dot{\hat{x}} = A\hat{x}(t) + Bu(t) - L(z(t) - D\hat{x}(t)),$$

$$\text{упредитель: } z(t) = D(e^{A\tau}\hat{x}(t) + \int_{-\tau}^0 e^{-A\xi} Bu(t+\xi)d\xi),$$

$$\text{обратная связь: } u = F\hat{x}.$$

Замкнутая система (8.37) относительно переменных x , $\varepsilon = x - \hat{x}$, z принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + BF)x(t) - BF\varepsilon(t), \quad \dot{\varepsilon}(t) = -LDx(t) + (A + LD)\varepsilon(t) + Lz(t), \\ z(t) &= D[\exp(A\tau)(x(t) - \varepsilon(t)) + \int_{-\tau}^0 \exp(-A\xi)Bu(t+\xi)d\xi]. \end{aligned}$$

Ее характеристический полином определяется соотношениями

$$\begin{vmatrix} pI - A - BF & -BF & 0 \\ -LD & pI - A - LD & L \\ D \exp(A\tau) + & D \exp(A\tau) + & \\ + DBF(I - \exp((A - Ip)\tau)(Ip - A)^{-1}) & + DBF(I - \exp((A - Ip)\tau)(Ip - A)^{-1}) & 0 \end{vmatrix} = \\ = \det(Ip - A - BF) \det(Ip - A - LD).$$

Следовательно, для управляемой и наблюдаемой замкнутой системы (8.37) можно произвольным образом назначить спектр характеристического полинома.

Заметим, что в приведенных подходах для компенсации запаздывания используются непрерывные измерения, относительно которых только и имеет смысл стандартное понятие наблюдаемости систем. В предыдущих разделах было отмечено, что синтез для систем с релейными измерениями необходимо совместно решать задачи синтеза обратной связи и устройств наблюдения для замкнутой системы. Основываясь на этом замечании, рассмотрим задачу стабилизации системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y_1 = Dx(t - \tau), \quad y_{1d}(t) = \text{sign}y_1, \quad (8.38)$$

в которой для измерения принимается доступным лишь вектор y_{1d} . Ставится задача стабилизации системы (8.38) в предположениях об управляемости пары матриц $\{A, B\}$ и наблюдаемости пары $\{D, A\}$. Попытаемся свести задачу к известным методам компенсации запаздывания, основанным на использовании непрерывных значений выходных переменных. Кроме того, покажем, что при выполнении в системе (8.38) условия $DB = 0$ (т.е. управление отделено от выходных переменных несколькими интеграторами и алгоритм стабилизации, предложенный в параграфе 8.4, нельзя использовать) задачу можно решить при непосредственном замыкании обратной связи по релейным измерениям с добавлением вибролинеаризующего сигнала. Для наглядности рассмотрим систему с одним входом и одним выходом третьего порядка вида:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = u, \quad y = \text{sign}[x_1(t - \tau)]. \quad (8.39)$$

Используя идею вибролинеаризации релейных элементов с помощью высокочастотных сигналов, введем замену переменных вида $\bar{x}_1 = x_1 + M_1 \sin \omega t$, $\omega = \text{const}$ и применим процедуру метода разделения движений [13] к системе (8.39). Относительно новой переменной с учетом (8.39) получим дифференциальное уравнение $\dot{\bar{x}}_1 = x_2 + \omega M_1 \cos \omega t$. Полагая в этом уравнении переменные x_2 в качестве фиктивных управлений, введем новую переменную $\bar{x}_2 = x_2 + k_1 \bar{x}_1 + \omega M_1 \cos \omega t$, описываемую уравнением $\dot{\bar{x}}_2 = x_3 + k_1(-k_1 \bar{x}_1 + \bar{x}_2) - \omega^2 M_1 \sin \omega t$. И, наконец, рассматривая в этом уравнении переменную x_3 в качестве фиктивных управлений, введем замену переменных вида $\bar{x}_3 = x_3 + k_2 \bar{x}_2 - \omega^2 M_1 \sin \omega t$. В новых переменных система (8.39) примет вид

$$\dot{\bar{x}}_1 = -k_1 \bar{x}_1 + \bar{x}_2, \quad \dot{\bar{x}}_2 = -k_2 \bar{x}_2 + \bar{x}_3, \quad \dot{\bar{x}}_3 = u + k_2(-k_2 \bar{x}_2 + \bar{x}_3) - \omega^3 M_1 \cos \omega t. \quad (8.40)$$

Выбор истинных управлений в виде $u = \omega^3 M_1 \cos \omega t + v$ приводит систему (8.40) к автономной форме относительно фиктивных управлений:

$$\dot{\bar{x}}_1 = -k_1 \bar{x}_1 + \bar{x}_2, \quad \dot{\bar{x}}_2 = -k_2 \bar{x}_2 + \bar{x}_3, \quad \dot{\bar{x}}_3 = v + k_2(-k_2 \bar{x}_2 + \bar{x}_3). \quad (8.41)$$

Введем дополнительный фильтр, описываемый уравнением

$$\mu \dot{y}_{\text{eq}} = -y_{\text{eq}} + \text{sign}[\bar{x}_1(t - \tau)]. \quad (8.42)$$

Значение выходной переменной фильтра (8.42) y_{eq} — суть среднее значение переменной $\bar{x}_1(t - \tau)$, которое может быть использовано для компенсации запаздывания приведенными выше известными методами в задаче стабилизации системы (8.41) и (8.42). Отметим, что при $\bar{x}_1 = x_1 + M_1 \sin \omega t = 0$ регулируемая переменная x_1 будет колебаться относительно нуля с амплитудой M_1 , что противоречит требованию ее стабилизации. Для решения этой проблемы, можно использовать переменную амплитуду вибролинеаризующего сигнала (как функцию выходной переменной фильтра), удовлетворяющую условию $M_1(|y_{\text{eq}}|) \rightarrow 0$ при $|y_{\text{eq}}| \rightarrow 0$. Естественно, что с математической точки зрения, такая доработка схемы может потребовать увеличения порядка фильтра.

Эффекта вибролинеаризации удастся также добиться при использовании вместо предложенной выше непрерывной обратной связи релейных сигналов. В этом случае вибролинеариза-

ция осуществляется за счет быстрых переключений входных релейных сигналов конечной амплитуды.

В заключение данного раздела кратко перечислим предложенные способы синтеза линейных систем при релейных измерениях:

- аппаратный способ (параграф 8.1.2), требующий доработки объекта управления, не всегда осуществимой на практике;
- восстановление начальных условий по релейным измерениям применительно к разомкнутой системе, что может оказаться неприемлемым на практике из-за непредсказуемо большого времени оценивания (параграф 8.1.3);
- новый подход, заключающийся в совместном решении задач наблюдения и стабилизации. Выделен класс систем, для которых непосредственное замыкание релейной обратной связи по выходу приводит к возникновению в замкнутых системах идеальных скользящих режимов и, как следствие, решает задачу стабилизации выходных переменных (параграф 8.1.4);
- решение задачи стабилизации линейных систем с релейными измерениями при наличии запаздывания с использованием вибролинеаризации релейных элементов, что позволило обеспечить высокочастотные переключения релейного выхода в замкнутой системе и использовать среднюю составляющую релейного выхода для компенсации запаздывания на низких частотах известными методами, для реализации которых необходим непрерывный сигнал выходных переменных (параграф 8.1.5).

8.2. Управление топливоподачей в ДВС с обратной связью по λ -зонду

8.2.1. Модель объекта управления. Постановка задачи

В качестве объекта управления рассматривается двигатель внутреннего сгорания с искровым зажиганием, укомплектованный топливными форсунками с центральной или распределенной (по цилиндровой) системой впрыска и трехкомпонентным нейтрализатором выхлопных газов с λ -зондом непрерывного или релейного типа. Упрощенная модель объекта управления представлена на рис. 8.4 и состоит из двух подсистем – модели топливоподачи, рассматриваемой как основной, и модели воздухоподачи, которая является внешней по отношению к основной.

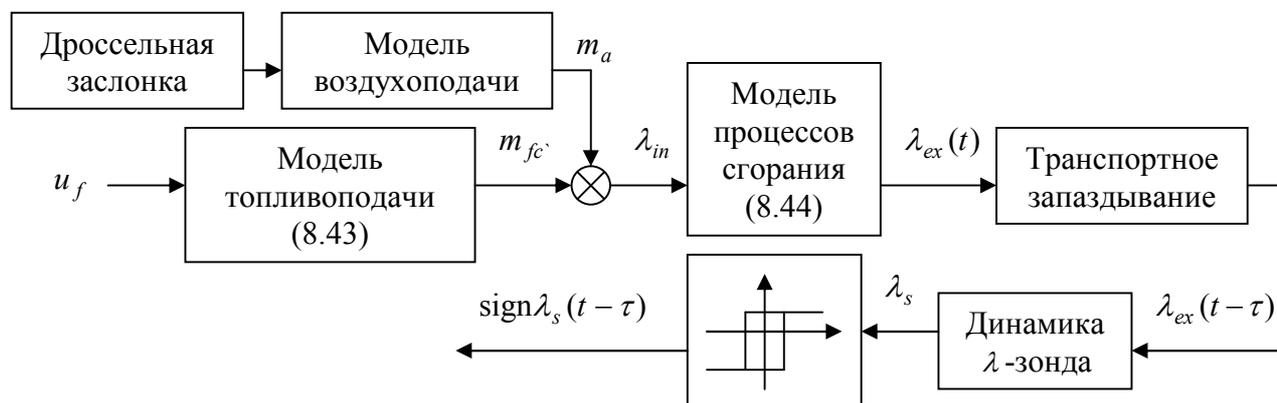


Рис. 8.4. Структурная схема топливоподачи ДВС

Изменение давления в воздуховоде в результате поступления отработавших газов во впуск-

ной воздухопровод за счет перекрытия клапанов [67] моделируется генератором синусоидального сигнала.

Знание массового расхода воздуха (\dot{m}_a – через дроссельную заслонку; \dot{m}_c – цикловое наполнение) позволяет более точно поддерживать заданное соотношение воздух/топливо и улучшает реакцию системы на скачок по воздействию внешнего контура (управление по скорости ДВС), задаваемый положением дроссельной заслонки $A(\alpha)$. В разделе 8.3 более подробно описана модель воздухоподачи, на основе которой предложены методы оценки массового расхода воздуха, поступающего в каждый цилиндр ДВС.

Модель топливоподачи включает в себя динамику подачи топлива в цилиндр с учетом выпадения части топлива в пленку и последующим его испарением, описываемую уравнениями (модель Акино) [55]:

$$T_f \dot{m}_f = -m_f + b_f u_f, \quad m_{fc} = (1 - X)u_f + m_f, \quad (8.43)$$

где m_f – масса топлива, выпадающая в виде пленки на стенках впускного воздухопровода, m_{fc} – масса топлива, подаваемая в цилиндр, u_f – масса впрыскиваемого топлива (входной сигнал); T_f, b_f – числа, характеризующие динамику контура топливоподачи. Отметим, что поскольку система (8.43) описывает динамику не только собственно форсунки, но и динамику массового расхода топлива через впускной клапан, связанную с изменением концентрации паров топлива и массы топливной пленки на стенках впускного коллектора, постоянная времени впрыска $T_f(\omega)$ рассматривается как функция частоты вращения ω . Коэффициент $X = X(\alpha, \omega)$ слабо зависит от угла открытия дроссельной заслонки α и угловой скорости вала двигателя и принимается константой. Управляющее воздействие здесь – суть момент времени и продолжительность открытия топливной форсунки.

Динамика сгорания топливо-воздушной смеси (λ) в цилиндре описывается уравнением первого порядка

$$T_c \dot{\lambda}_{ex} = -\lambda_{ex} + b_c \lambda_{in}, \quad (8.44)$$

где T_c, b_c – числа, характеризующие динамику сгорания.

Предполагается, что кислород и топливо сгорают в стехиометрической пропорции 14,7. Несгоревший кислород

$$x(t) = \dot{m}_c(t) - 14,7 \dot{m}_{fc}(t) \quad (8.45)$$

(если он имеется) проходит через двигатель, выпускной коллектор и участок выхлопной трубы, находящийся перед λ -зондом. Это вносит в измерения транспортную задержку τ . Динамика λ -зонда описывается уравнением $T_s \dot{\lambda}_s = -\lambda_s + b_s \lambda_{ex}$ [25], где T_s, b_s – числа, характеризующие динамику λ -зонда.

Задача управления заключается в выработке такого задания на впрыск топлива u_f , которое обеспечивает заданное соотношение воздух-топливо, в частности, стехиометрическое соотношение ($x(t) = 0$) при использовании трехкомпонентных нейтрализаторов.

Описанная выше модель топливоподачи ДВС принадлежит классу линейных систем с запаздывающим аргументом и релейными измерениями вида (8.38). В следующем параграфе алгоритмы, разработанные в разделе 8.1, применяются к системе (8.43)–(8.45).

8.2.2. Результаты моделирования

В данном параграфе представлены результаты моделирования различных схем реализации обратных связей в системе управления топливоподачей в ДВС. Учитывая, что постоянные времени в уравнениях (8.44) и (8.45) существенно меньше, чем постоянная времени в уравнении Акино (8.43), $T_c, T_s \ll T_f$, будем рассматривать в качестве модели объекта управления вместо системы (8.43)–(8.45) следующую динамическую систему:

$$T_{fo}\dot{x}_1 = -x_1 + k_{fo}u, \quad T_{co}\dot{x}_2 = 14,7(x_1 + u) - x_2 + f, \quad y = \text{sign}[x_2(t - \tau)], \quad (8.46)$$

где $T_{fo} = 1, T_{co} = 0,05, k_{fo} = 0,5, k_{co} = 1, \tau = 0,3$ – нормированные коэффициенты, принимаемые далее при моделировании, 14,7 – коэффициент стехиометрического состава смеси.

В качестве модели воздушного тракта принято следующее уравнение:

$$\dot{f} = -f + \alpha, \quad (8.47)$$

где f – масса воздушного заряда, поступающая в камеру сгорания, α – угол открытия дроссельной заслонки. Ставится задача стабилизации переменной

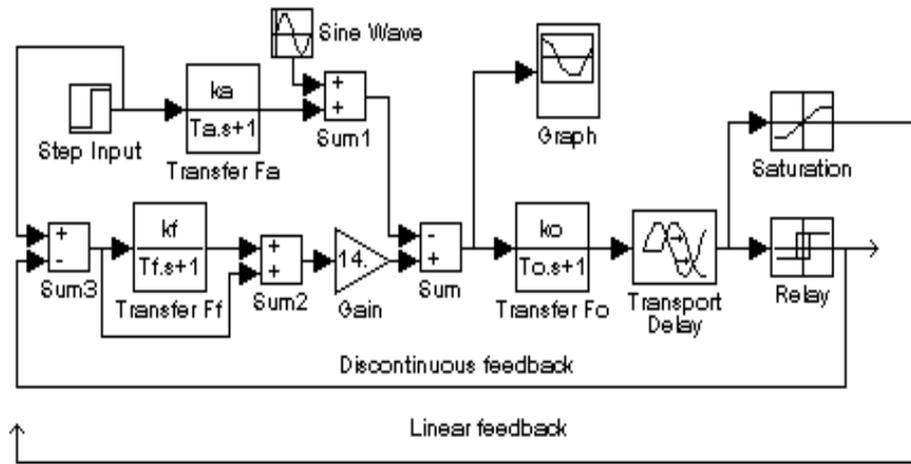
$$x_p = 14,7(x_1 + u) + f \quad (8.48)$$

в предположении, что доступны для измерения переменные y, α .

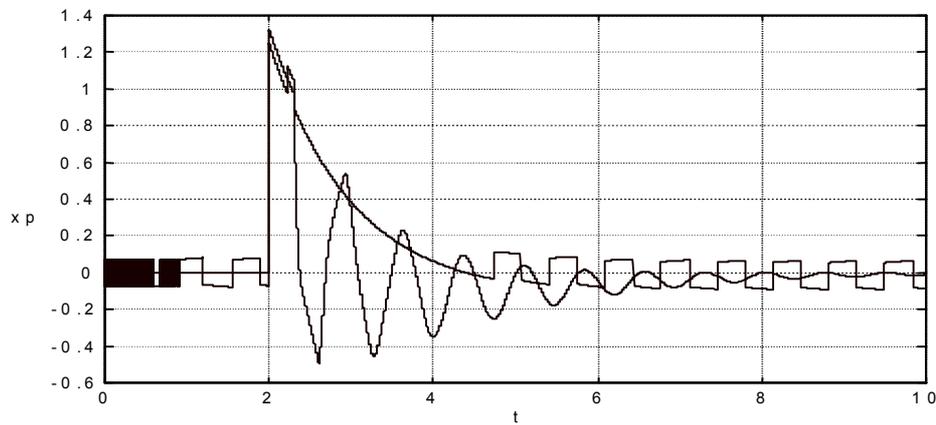
На рис. 8.5–8.8 приводятся структурные схемы (а) и результаты моделирования (б) различных схем реализации обратных связей в системе управления топливоподачей в среде MATLAB. Результаты моделирования показывают реакцию систем (переходные процессы по переменным $x_p(t), x_2(t)$) на скачкообразное изменение угла открытия дроссельной заслонки от 0 до 2 в момент времени 2 сек.

1) *Непосредственное замыкание обратной связи.* Рассмотрим простейший способ управления подачей топлива [61] с непосредственным замыканием обратной связи по выходным сигналам λ -зонда без компенсации запаздывания. На рис. 8.5,а показана структурная схема модели объекта управления и обратных связей с релейным (блок «Relay») и непрерывным (эталонным, блок «Saturation») λ -зондом. На рис. 8.5,б приведены результаты моделирования обоих случаев, из которых видно, что при непрерывных измерениях ограничено быстродействие из-за возможной потери устойчивости при увеличении коэффициента усиления в цепи обратной связи (поведение регулируемой переменной $x_p(t)$ описывается синусоидальной кривой); при релейных измерениях наличие запаздывания приводит к неудовлетворительному процессу из-за возникновения автоколебаний в установившемся режиме (кусочно-непрерывная часть диаграммы на рис. 8.5,б).

2) *Компенсация запаздывания на основе упредителя Смитта.* Использование классической схемы компенсации запаздывания с упредителем Смитта (8.37) (тонируемые блоки на рис. 8.6,а) позволяет получить положительный эффект по быстродействию по сравнению с непосредственным замыканием обратной связи (см. рис. 8.5,б). В установившемся режиме колебательность процесса и с непрерывной, и с релейной обратной связью существенно меньше. В представленной на рис. 8.6,б двойной диаграмме сплошной линией приводится результат, полученный при непрерывных измерениях выходной переменной (блок «Saturation» на рис. 8.6,а), а пунктирной – при релейных измерениях (блок «Relay» на рис. 8.6,а).

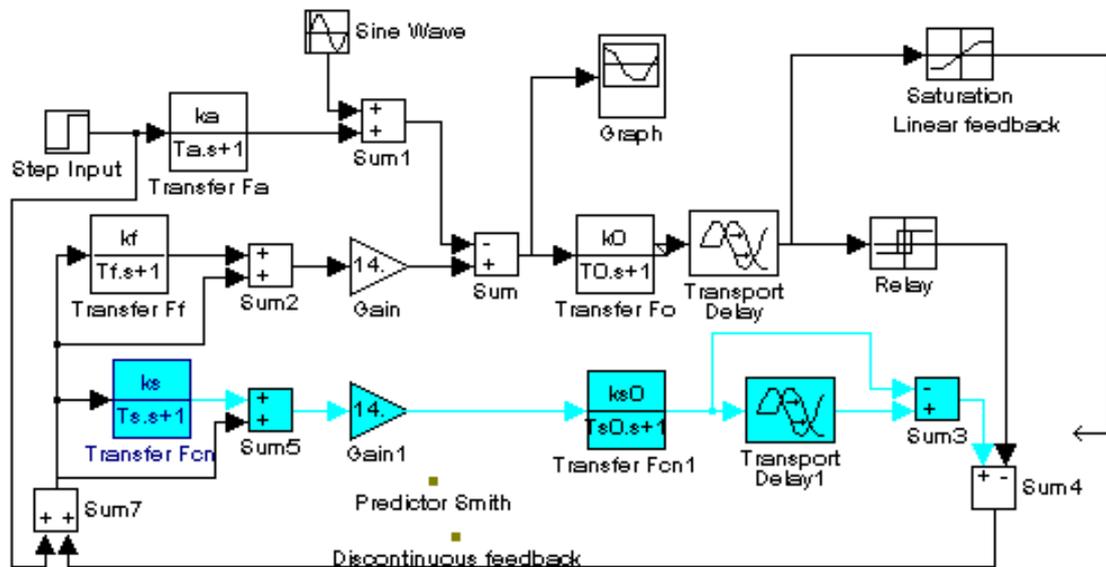


a



b

Рис.8.5. Схема (a) и диаграммы (б) моделирования системы управления без компенсации запаздывания



a

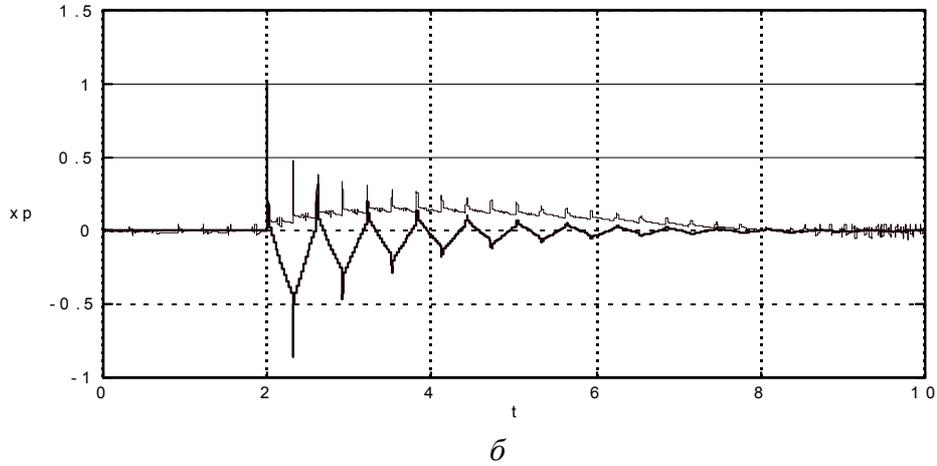


Рис. 8.6. Схема (а) и диаграммы (б) моделирования системы управления с компенсацией запаздывания с помощью упредителя Смитта

3) Синтез управления с использованием модели объекта управления и скользящих режимов. За счет расширения пространства состояний система (8.46)–(8.48) относительно переменных x_p , x_2 , u принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= 14,7[(-x_1 + k_{fo}u) + v] - f + \alpha, \\ T_{co}\dot{x}_2 &= 14,7(x_1 + u) - x_2 + f, \\ \dot{f} &= -f + \alpha, \quad \dot{u} = v, \quad y = \text{sign}[x_2(t - \tau)]. \end{aligned} \quad (8.49)$$

Построим наблюдатель состояния в виде

$$\dot{\bar{x}}_1 = -\bar{x}_1 + k_{fo}u, \quad T_{co}\dot{\bar{x}}_2 = 14,7(x_1 + u) - \bar{x}_2 + z, \quad \dot{z} = -z + \alpha. \quad (8.50)$$

Выберем новые управляющие воздействия в виде

$$v = \bar{x}_1 - k_{fo}u + \frac{1}{14,7}(z - \alpha) + v_1, \quad v_1 = -M \text{sign}s, \quad s = 14,7(\bar{x}_1 + u) + z. \quad (8.51)$$

Тогда уравнение (8.48) примет вид

$$\dot{x}_p = -14,7(x_1 - \bar{x}_1) - (f - z) - M \text{sign}s, \quad (8.52)$$

и при достаточно большой амплитуде разрывных воздействий M в системе (8.52) возникнет скользящее движение по плоскости $s = 14,7(\bar{x}_1 + u) + z = 0$, что при условии сходимости переменных наблюдателя (8.50) к переменным объекта управления (8.46) будет означать решение задачи стабилизации переменных $x_p \rightarrow 0$ и, следовательно, решает поставленную задачу. В свою очередь, сходимость оценок наблюдателя к истинным значениям объекта управления следует из устойчивости системы, записанной относительно невязок $e_1 = x_1 - \bar{x}_1$, $e_2 = x_2 - \bar{x}_2$, $e_f = f - z$ с учетом (8.46), (8.47) и (8.50) в виде

$$\dot{e}_1 = -e_1, \quad T_{co}\dot{e}_2 = 14,7e_1 - e_2 + e_f, \quad \dot{e}_f = -e_f. \quad (8.53)$$

На рис. 8.7. представлены предложенная схема управления (а) и результат моделирования – переходный процесс по переменной x_2 (б). Быстродействие полученной системы примерно такое же, как и в случае использования схемы с упредителем Смитта. В то же время, качество переходного процесса (перерегулирование и точность) по переменным $x_p(t)$, $x_2(t)$ на порядок выше.

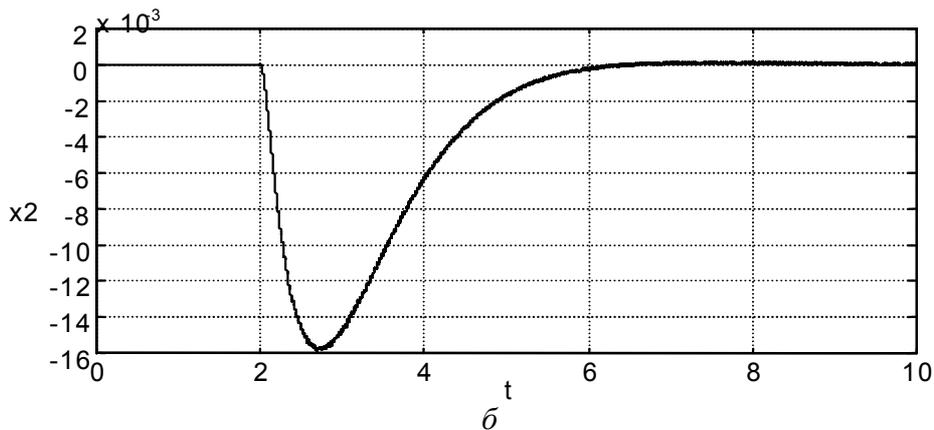
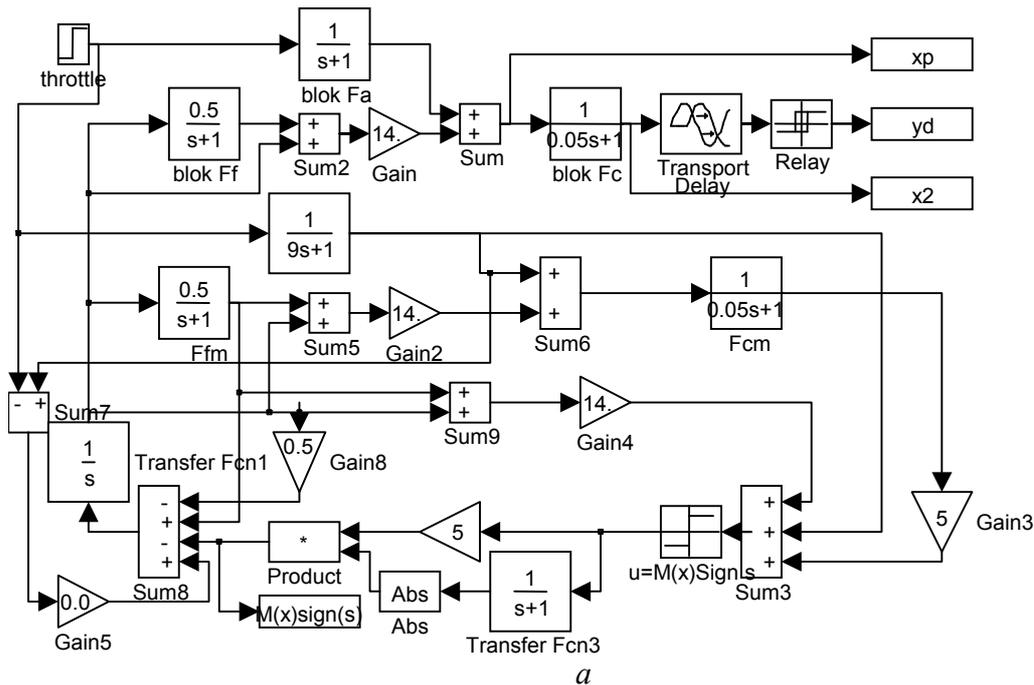


Рис. 8.7. Схема (а) и диаграмма (б) моделирования системы управления с использованием модели объекта и разрывной обратной связи

Существенным недостатком предложенной схемы управления является не грубость к параметрическим неопределенностям. Эксперименты показали, что допустимый для обеспечения устойчивости разброс параметров составляет 10–20% от номинальных значений. Такие свойства системы управления обуславливаются тем, что данная схема управления не является управлением по обратной связи. На возможность синтеза системы управления по обратной связи указывает следующее наблюдение. Переменная $x_2(t)$ в окрестности нуля имеет колебательный характер, и релейный датчик переключается с высокой частотой. Отметим, что высокая частота этих переключений обусловлена именно наличием скользящих движений, локализованных в контуре наблюдатель–управляющее реле. Если на выходе релейного датчика поставить фильтр, то его выходной сигнал будет равен входному непрерывному сигналу. Таким образом, в малой окрестности нуля имеет место эффект вибролинеаризации

8.3. Каскадный синтез наблюдателя переменных воздушного тракта ДВС

В данном разделе разработанные каскадные алгоритмы синтеза наблюдателей состояния применяются для решения следующих задач. В разомкнутом контуре воздухоподачи ДВС решена задача оценки переменных воздушного тракта (в том числе, циклового наполнения) по показаниям датчика давления во впускном трубопроводе. В замкнутом контуре управления топливоподачей проведена дополнительная коррекция вычисленного значения циклового наполнения по показаниям датчика состава отработавших газов.

Оценки переменных воздушного тракта (в том числе, циклового наполнения) необходимы для формирования программного управления топливоподачей. Как было отмечено, управление топливоподачей в ДВС при заданном соотношении воздух/топливо заключается в формировании управляющего сигнала в замкнутом контуре по измерениям датчика состава отработавших газов (λ -зонд) и программного управления в разомкнутом контуре по величине циклового наполнения. Величина циклового наполнения, характеризующая количество воздуха, поступившего в цилиндры двигателя в процессе впуска, является одним из первичных управляющих параметров, который определяет возможный характер протекания рабочего цикла [25]. Проблема заключается в том, что величину циклового наполнения невозможно измерить непосредственно. Косвенные методы расчета циклового наполнения по показаниям датчика массового расхода воздуха через дроссельную заслонку носят вероятностный характер и содержат существенные динамические ошибки, связанные с тем, что большинство параметров, определяющих цикловое наполнение, не могут быть непосредственно измерены даже в лабораторных условиях.

В данном разделе предлагаются методы оценки переменных воздушного тракта ДВС с помощью наблюдателя состояния на скользящих режимах. В качестве объекта управления рассматривается четырехцилиндровый ДВС с искровым зажиганием, с системой распределенного впрыска бензина и комплексной антиоксидантной системой. Модель объекта управления состоит из двух подсистем: основной модели топливоподачи и внешней модели воздухоподачи (см. рис. 8.4). Динамическая модель воздухоподачи (объект наблюдения) описывается системой дифференциальных уравнений пятого порядка, содержащих нелинейные элементы. В качестве измерений (скалярного выхода) рассматриваются показания датчика давления во впускном трубопроводе. Использование традиционных методов расчета коэффициентов асимптотического наблюдателя состояния в данном случае затруднительно в связи с высокой размерностью модели и неточным определением ее параметров. Разработанный в главе 4 подход, основанный на методе разделения движений в классе систем с разрывными управлениями, позволил разделить данную многомерную задачу наблюдения на последовательно независимо решаемые одномерные подзадачи. Полученные за теоретически конечное время оценки переменных воздушного тракта позволяют рассчитать цикловое наполнение в каждом из четырех цилиндров. Погрешность вычисления циклового наполнения, связанная с параметрическими неидеальностями объекта наблюдения, устраняется с помощью сигнала, сформированного в замкнутом контуре топливоподачи по показаниям релейного λ -зонда.

8.3.1. Описание динамической модели воздухоподачи

Принятые обозначения технологических переменных:

\dot{m}_a – массовый расход воздуха через дроссельную заслонку;

\dot{m}_c – массовый расход воздуха в цилиндре (цикловое наполнение);

α – положение дроссельной заслонки;

θ – угол поворота коленчатого вала;

V – объем входного воздухопровода;

V_c – объем цилиндра;
 p_a – атмосферное давление;
 p_m – давление во впускном воздуховоде;
 p_c – давление в цилиндре;
 $Lift$ – положения впускного клапана цилиндра;
 η – коэффициент наполнения цилиндра.
 T – температура;
 R – газовая постоянная;
 T_m, T_s – постоянные времени.

На рис. 8.9 представлена структурная схема воздухоподачи в один из четырех цилиндров ДВС, которая включает взаимосвязанные динамические субмодели, составленные на основе анализа газодинамических процессов во впускной системе ДВС.

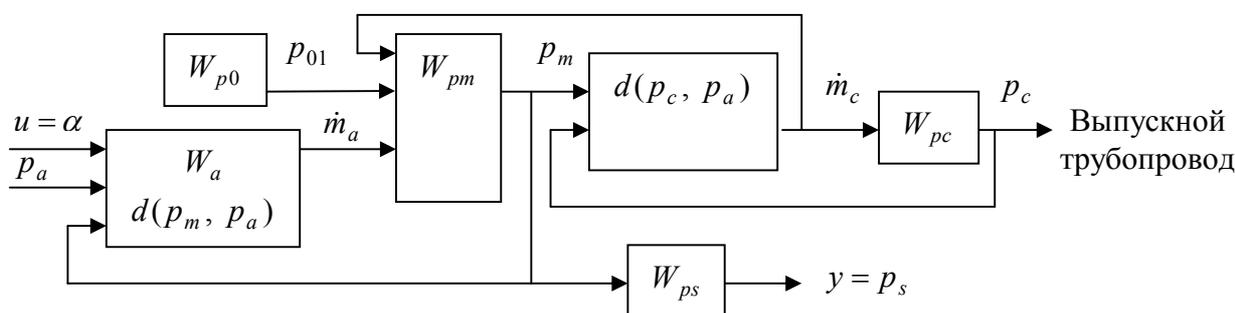


Рис. 8.9. Структурная схема динамической модели воздухоподачи

Блок « W_a » на рис. 8.9 обозначает динамическую модель дроссельного узла. Модель дроссельной заслонки может быть представлена скачкообразным сигналом (предельный случай), характеризующим изменение ее положения. Положение дроссельной заслонки является входным воздействием $u = \alpha$ внешнего контура управления по скорости. Массовый расход воздуха через дроссельную заслонку может быть непосредственно измерен с помощью термоанемометрического датчика или достаточно точно вычислен через нелинейную функцию [69]

$$\dot{m}_a = A(\alpha)d(p_m, p_a), \quad \text{где} \quad A(\alpha) = -0,2215 - 2,275\alpha + 0,23\alpha^2,$$

$$d(p_m, p_a) = (2/\pi) \times \arctg[12(p_m/p_a - 1)].$$

Блок « W_{pm} » на рис. 8.9 обозначает динамическую модель распространения воздушного потока во впускном трубопроводе, которая строится в предположении, что выполняется основной закон для идеального газа: $\dot{p}_m = (1/V)RT(\dot{m}_a - \dot{m}_c)$.

Цикловое наполнение \dot{m}_c – количество воздуха, поступившее в цилиндр двигателя из впускной системы в конкретном рабочем цикле или при установившемся положении режимной точки. Пренебрегая неравномерностью распределения воздуха по цилиндрам, определим цикловое наполнение, как долю одного цилиндра в общей массе воздуха, поступившей в цилиндры двигателя за рабочий цикл, соотнесенную с цикличностью работы двигателя. Термодинамическую модель наполнения i -го цилиндра ($i = \overline{1, 4}$) в некоторых предположениях удастся записать в аналитическом виде для конкретного типа ДВС следующим образом [69]:

$$\dot{m}_c = \eta_i Lift_i(\theta)d(p_c, p_m) = \varphi(p_c, p_m), \quad (8.54)$$

$$d(p_c, p_m) = 2\arctg[12(p_c/p_m - 1)]/\pi,$$

$$Lift_i(\theta) = \begin{cases} 0,14 \sin^2 \theta, & \text{если } \theta \in [(i-1)180^0, i \cdot 180^0], \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Предполагается, что коэффициенты наполнения являются постоянными, известными величинами $\dot{\eta}_i = 0$, $i = \overline{1, 4}$. В дальнейших построениях используется упрощенный вид выражения (8.54), который получен посредством линеаризации в окрестности режимной точки (p_{m_n}, p_{c_n}) :

$$\dot{m}_c \approx g_m(\eta_i, \theta, p_{m_n}, p_{c_n})p_m + g_c(\eta_i, \theta, p_{m_n}, p_{c_n})p_c, \quad (8.55)$$

где g_m, g_c – коэффициенты линеаризации.

Изменение давления во впускном воздуховоде зависит также от изменения давления за счет поступления отработавших газов во впускной воздуховод в результате перекрытия клапанов. В момент перекрытия клапанов имеет место выброс некоторого количества остаточных газов во впускной трубопровод и свежий заряд, поступающий в цилиндр, разбавляется остаточными газами. Это перетекание достигает значительной величины на низких скоростных режимах и существенно осложняет точную оценку общей массы воздуха во впускном трубопроводе. Перекрытие клапанов синхронизировано с частотой вращения двигателя и возникает на пересечении тактов впуска и выпуска отработавших газов, когда выпускной и впускной клапаны открыты одновременно (перекрытие клапанов по длительности наблюдается в диапазоне до 20 градусов поворота коленчатого вала). Аналогичное явление связано с вытеснением воздушного заряда из цилиндра во впускной трубопровод за счет движения поршня вверх на пересечении тактов впуска и сжатия [55]. После открытия дроссельной заслонки расход газа сначала линейно возрастает, но после нескольких оборотов коленчатого вала отмечаются циклические колебания величины мгновенного расхода, синхронизированные с процессом впуска. С увеличением скорости расход газа меняется менее интенсивно и колебания расхода происходят с меньшей амплитудой. Таким образом, блок « W_{p0} » на рис. 8.9 характеризует волновые явления во впускном воздуховоде, в том числе явление перекрытия клапанов. Экспериментальные данные показывают, что уравнения относительно переменных p_{01}, p_{02} (генератора синусоидального сигнала)

$$\dot{p}_{01} = p_{02}, \quad \dot{p}_{02} = -\omega^2 p_{01} \quad (8.56)$$

достаточно хорошо отражают природу этих явлений.

С учетом выше сказанного динамическая модель изменения давления во входном воздуховоде принимает следующий вид: $T_m \dot{p}_m = -p_m + (RT/V)[\dot{m}_a(\alpha, p_m) - \dot{m}_c] + p_{01}$, где $T_m = \text{const}$, или с учетом выражения (8.55)

$$\dot{p}_m = \frac{1}{T_m} \left(-p_m + \frac{RT}{V} [\dot{m}_a(\alpha, p_m) - g_m p_m - g_c p_c] + p_{01} \right). \quad (8.57)$$

Блок « W_{pc} » на рис. 8.9 обозначает динамическую модель изменения давления в цилиндре, которая составлена в предположении, что выполняется основной закон идеального газа для переменного объема $\dot{p}_c = (1/V_c(\theta))[RT\dot{m}_c - \dot{V}_c(\theta)p_c]$, или с учетом выражения (8.55)

$$\dot{p}_c = q_1 p_c + q_2 p_m, \quad q_1 = (RTg_c - \dot{V}_c(\theta))/V_c(\theta), \quad q_2 = RTg_m/V_c(\theta). \quad (8.58)$$

Изменение и скорость изменения объема цилиндра $\dot{V}_c(\theta)$ являются функциями угла поворота коленчатого вала и для конкретного типа двигателя могут быть выражены аналитически [69].

Блок « W_{ps} » на рис. 8.9 обозначает динамику измерительного устройства. Измеряемой величиной является сигнал датчика давления $y = p_s$, установленного во впускном трубопроводе, который с учетом собственной динамики описывается уравнением

$$T_s \dot{p}_s = -p_s + a_s p_m, \quad (8.59)$$

где $T_s, a_s = \text{const}$.

Таким образом, в качестве модели воздухоподачи ДВС принимаются уравнения (8.56)–(8.59). Ставится задача получения оценок переменных воздушного тракта p_m, p_{01}, p_{02}, p_c по измерениям датчика давления во впускном трубопроводе $y = p_s$ с помощью наблюдателя состояния на скользящих режимах. Полученные оценки используются для вычисления массового расхода воздуха \dot{m}_c (8.54), поступающего в i -й цилиндр ($i = \overline{1, 4}$). Процедура, предлагаемая в следующем разделе для одного цилиндра, аналогичным образом повторяется для каждого из четырех цилиндров ДВС.

8.3.2. Синтез наблюдателя состояния на основе модели разомкнутого контура воздухоподачи

За основу динамического устройства наблюдения принимается модель объекта наблюдения (8.56)–(8.59), которая с помощью неособых замен переменных

$$y_1 = q_3 p_c - p_{01}, \quad q_3 = (RT/V)g_c, \quad y_2 = q_1 p_1 - p_{02}, \quad y_3 = (q_1^2 + \omega^2) p_{01} \quad (8.60)$$

приводится к блочно-наблюдаемой форме (см. раздел 4.2), состоящей из пяти одномерных блоков вида

$$\begin{aligned} \dot{p}_s &= \frac{1}{T_s} (-p_s + a_s p_m), \quad \dot{p}_m = \frac{1}{T_m} \left(-p_m + \frac{RT}{V} [\dot{m}_a(\alpha, p_m) - g_m p_m] - y_1 \right), \\ \dot{y}_1 &= q_1 y_1 + y_2 - q_3 q_2 p_m, \quad \dot{y}_2 = -q_1 y_2 + y_3, \quad \dot{y}_3 = -(\omega^2 + q_1^2) y_2 + q_1 y_3. \end{aligned} \quad (8.61)$$

Система уравнений (8.61) принимается за основу динамического наблюдателя состояния вида

$$\begin{aligned} \dot{\bar{p}}_s &= \frac{1}{T_s} (-\bar{p}_s + a_s \bar{p}_m) + v_s, \quad \dot{\bar{p}}_m = \frac{1}{T_m} \left(-\bar{p}_m + \frac{RT}{V} [\dot{\bar{m}}_a(\alpha, \bar{p}_m) - g_m \bar{p}_m] - \bar{y}_1 \right) + v_m, \\ \dot{\bar{y}}_1 &= q_1 \bar{y}_1 + \bar{y}_2 - q_3 q_2 \bar{p}_m + v_1, \quad \dot{\bar{y}}_2 = -q_1 \bar{y}_2 + \bar{y}_3 + v_2, \quad \dot{\bar{y}}_3 = -(\omega^2 + q_1^2) \bar{y}_2 + q_1 \bar{y}_3 + v_3, \end{aligned} \quad (8.62)$$

где скалярные переменные с чертой обозначают оценки одноименных переменных, переменные v_s, v_m, v_1, v_2, v_3 – разрывные корректирующие воздействия наблюдателя, которые формируются так, чтобы решить задачу стабилизации уравнений, записанных относительно невязок $\varepsilon_m = p_m - \bar{p}_m, \varepsilon_s = p_s - \bar{p}_s, \varepsilon_a = \dot{m}_a(\alpha, p_m) - \dot{\bar{m}}_a(\alpha, \bar{p}_m), \varepsilon_i = y_i - \bar{y}_i$ ($i = \overline{1, 3}$), вида

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_s &= \frac{1}{T_s}(-\varepsilon_s + a_s \varepsilon_m) - v_s, \quad \dot{\varepsilon}_m = \frac{1}{T_m}(-\varepsilon_m + \frac{RT}{V}[\varepsilon_a - g_m \varepsilon_m] - \varepsilon_1) - v_m, \\ \dot{\varepsilon}_1 &= q_1 \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - q_3 q_2 \varepsilon_m - v_1, \quad \dot{\varepsilon}_2 = -q_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - v_2, \quad \dot{\varepsilon}_3 = -(\omega^2 + q_1^2) \varepsilon_2 + q_1 \varepsilon_3 - v_3.\end{aligned}\quad (8.63)$$

В соответствии с каскадным методом (см. раздел 4.3) разработана пошаговая процедура выбора разрывных корректирующих воздействий. На каждом шаге процедуры последовательно решаются элементарные подзадачи синтеза. Они заключаются в следующем: в каждом блоке независимо стабилизируется переменная данного блока и находится динамическая оценка переменной состояния следующего блока, из которой формируется корректирующее воздействие следующего блока наблюдателя состояния.

Каскадная процедура выбора корректирующих воздействий наблюдателя состояния.

1) На первом шаге процедуры рассматривается первый блок системы (8.63), для которого комбинируемое корректирующее воздействие формируется из компенсирующей и разрывной составляющих по невязке относительно измеряемой переменной $v_s = -\varepsilon_s / T_s + M_s \text{sign} \varepsilon_s$, где $M_s = \text{const} > 0$ – амплитуда разрывного управления,

$$\dot{\varepsilon}_s = \frac{a_s}{T_s} \varepsilon_m - M_s \text{sign} \varepsilon_s. \quad (8.64)$$

В блоке (8.64) за конечное время обеспечиваются скользящие движения по поверхности $S_s = \{\varepsilon_s = 0\} \Rightarrow \bar{p}_s = p_s$ при выполнении условия существования скользящего режима $\varepsilon_s \dot{\varepsilon}_s < 0 \Rightarrow (a_s / T_s) |\varepsilon_m| < M_s$. Согласно методу эквивалентного управления из равенства $\dot{\varepsilon}_s = (a_s / T_s) \varepsilon_m - v_{s(\text{eq})} = 0$ получаем значение эквивалентного управления $v_{s(\text{eq})} = (a_s / T_s) \varepsilon_m$, которое служит для формирования корректирующего воздействия во втором блоке системы (8.63). Существенно для приложений, что скользящий режим возникает за конечный промежуток времени при конечной амплитуде разрывного управления. Эквивалентное управление может быть получено как выходной сигнал фильтра первого порядка.

Процедура, описанная на первом шаге, аналогичным образом повторяется для каждого блока системы (8.63).

2) На втором шаге комбинируемое корректирующее воздействие

$$v_m = \frac{1}{T_m}(-\varepsilon_m + \frac{RT}{V}[\varepsilon_a - g_m \varepsilon_m]) + M_m \text{sign} \varepsilon_m,$$

где $\varepsilon_m = v_{s(\text{eq})} T_s / a_s$, $M_m = \text{const} > 0$ – амплитуда разрывного компонента, за конечное время обеспечивает во втором блоке системы (8.63) $\dot{\varepsilon}_m = -(1/T_m) \varepsilon_1 - M_m \text{sign} \varepsilon_m$ скользящие движения по поверхности $S_m = \{\varepsilon_m = 0 \cap S_s\} \Rightarrow \bar{p}_m = p_m$ при выполнении условия $M_m > (1/T_m) |\varepsilon_1|$ и соотношении статики $\dot{\varepsilon}_m = 0 \Rightarrow v_{m(\text{eq})} = \varepsilon_1 / T_m$.

3) На третьем шаге комбинируемое корректирующее воздействие $v_1 = q_1 \varepsilon_1 + M_1 \text{sign} \varepsilon_1$, где $\varepsilon_1 = T_m v_{m(\text{eq})}$, $M_1 = \text{const} > 0$, за конечное время обеспечивает в третьем блоке системы (8.63) $\dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2 - M_1 \text{sign} \varepsilon_1$ скользящие движения по поверхности $S_1 = \{\varepsilon_1 = 0 \cap S_m\} \Rightarrow \bar{y}_1 = y_1$ при выполнении условия $M_1 > |\varepsilon_2|$ и соотношении статики $\dot{\varepsilon}_1 = 0 \Rightarrow v_{1\text{eq}} = \varepsilon_2$.

4) На четвертом шаге комбинированное корректирующее воздействие $v_2 = -q_1 v_{1eq} + M_2 \text{sign} v_{1eq}$ за конечное время обеспечивает в четвертом блоке системы (8.63) $\dot{\varepsilon}_2 = \varepsilon_3 - M_2 \text{sign} \varepsilon_2$ скользящие движения вдоль поверхности $S_2 = \{\varepsilon_2 = 0 \cap S_1\} \Rightarrow \bar{y}_2 = y_2$ при выполнении условия $M_2 > |\varepsilon_3|$ и соотношение статики $\dot{\varepsilon}_2 = 0 \Rightarrow v_{2eq} = \varepsilon_3$.

5) На последнем шаге комбинированное корректирующее воздействие $v_3 = q_1 v_{2eq} + M_3 \text{sign} v_{2eq}$ за конечное время обеспечивает в пятом блоке системы (8.63) $\dot{\varepsilon}_3 = -M_3 \text{sign} \varepsilon_3$ скользящие движения вдоль поверхности $S_3 = \{\varepsilon_3 = 0 \cap S_2\} \Rightarrow \bar{y}_3 = y_3$ при произвольной амплитуде разрывного компонента управления $M_3 = \text{const} > 0$.

Таким образом, стабилизация системы (8.63) осуществлена посредством организации быстрых движений, которые последовательно возникают в ее блоках. Соотношения, обратные (8.60), сформированные из переменных наблюдателя состояния, позволяют вычислить значения исходных переменных $p = \text{col}(p_m, p_{01}, p_{02}, p_c)$: $p_{01}^* = \bar{y}_3 / (q_1^2 + \omega^2)$, $p_{02}^* = q_1 / (q_1^2 + \omega^2) \bar{y}_3 - \bar{y}_2$, $p_c^* = [\bar{y}_1 + \bar{y}_3 / (q_1^2 + \omega^2)] / q_3$, которые за теоретически конечное время сходятся к переменным состояния модели объекта наблюдения (8.56)–(8.58), что позволяет рассчитать цикловое наполнение по формуле (8.54):

$$\dot{m}_c^* = \varphi(\bar{p}_m, p_c^*). \quad (8.65)$$

По расчетному значению циклового наполнения (8.65) в прямом контуре топливоподачи ДВС рассчитывается количество топлива, которое нужно впрыскивать в каждый цилиндр для обеспечения заданного соотношения воздух/топливо (программное управление).

8.3.3. Дополнительная коррекция по обратной связи

Задачи оценки переменных воздушного тракта и вычисления циклового наполнения в разомкнутом контуре системы воздухоподачи были решены на основе упрощенной модели объекта наблюдения с использованием расчетных значений части параметров, которые могут в точности не соответствовать реальным значениям. Неопределенность в составленную модель (8.56)–(8.59) также вносят неучтенные остаточные члены линеаризации (8.55). По этим причинам вычисленное значение циклового наполнения (8.65) может несколько отличаться от реального \dot{m}_{cr} на величину Δ_{m_c} : $\dot{m}_{cr} = \dot{m}_c^* \pm \Delta_{m_c}$.

Для коррекции расчетного значения циклового наполнения и повышения эффективности управления топливоподачей на переходных режимах используем оценки переменных, полученные в замкнутой системе управления, включающей контур топливоподачи с обратной связью по показаниям релейного λ -зонда (см. рис. 8.10). λ -зонд показывает недооценку или переоценку циклового наполнения при заданном соотношении воздух/топливо с некоторым запаздыванием, которое связано в том числе с конечным временем переноса отработавших газов от выпускного коллектора к месту установки датчика. В параграфе 8.1.5 были рассмотрены методы синтеза компенсатора запаздывания в виде асимптотического наблюдателя состояния, использование которых в системе управления топливоподачи (см. раздел 8.2) позволит восстановить непрерывный сигнал λ -зонда, не содержащий запаздывания:

$$y_\lambda = \dot{m}_{cr} - \dot{m}_c^* = \Delta_{m_c}. \quad (8.66)$$

Сигнал (8.66) рассматривается как входное воздействие для дополнительного нелинейного

наблюдателя состояния (блок « $W_{\dot{m}_c}^*$ » на рис. 8.10):

$$\dot{m}_c^* = f(\bar{p}_m, p_c^*, p_{01}^*, \dot{m}_c^*) + k_{m_c} y_\lambda, \quad (8.67)$$

где $k_{m_c} = \text{const} > 0$, $f = (\partial\varphi / \partial p_c^*) \dot{p}_c^* + (\partial\varphi / \partial \bar{p}_m) \dot{\bar{p}}_m$. Наблюдатель (8.67) выполняет двойную функцию: осуществляет фильтрацию расчетного значения циклового наполнения (8.65); с ростом коэффициента k_{m_c} уменьшается ошибка Δ_{m_c} вычисления циклового наполнения.

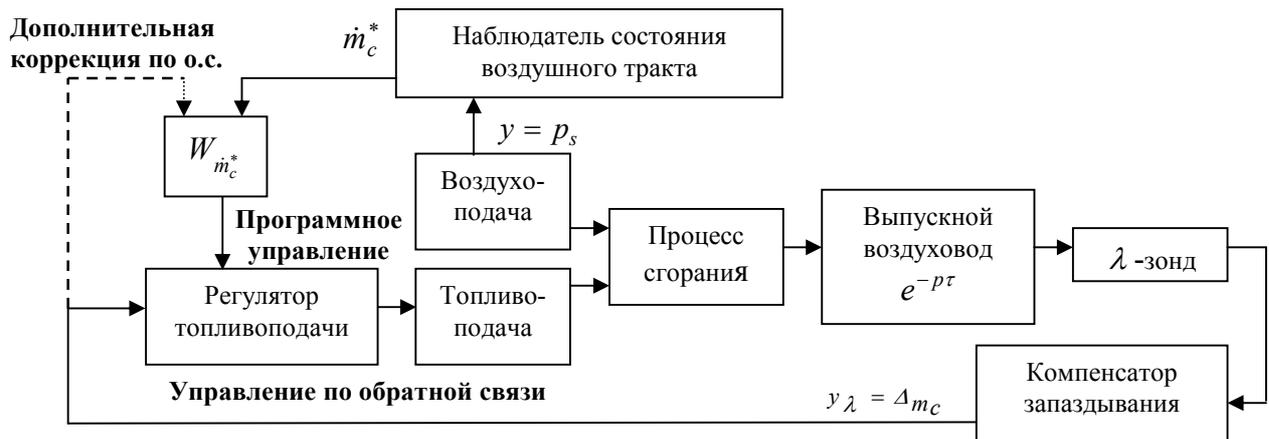


Рис.8.10. Структурная схема замкнутой системы управления топливоподачей

Таким образом, предложенный метод получения оценок переменных состояния воздушного тракта ДВС с помощью наблюдателя состояния на скользящих режимах позволяет решить задачу оценивания за теоретически конечное время при минимально возможном количестве датчиков. Отличительной чертой данного подхода является возможность декомпозиции задачи оценивания высокой размерности на независимо решаемые подзадачи меньшей размерности. Такая декомпозиция существенна с точки зрения реализации приведенных алгоритмов на микропроцессорной технике с учетом ограничений по быстродействию и на объем вычислительных ресурсов. Другой важной чертой предложенных методов получения оценок воздушного тракта является, с одной стороны, использование методов систем с разрывными управлениями, обеспечивающих инвариантность к внешним и параметрическим возмущениям, а с другой – использование дополнительной коррекции получаемых оценок по преобразованному сигналу λ -зонда, порождаемому в контуре управления топливоподачей.

В заключение данной главы кратко перечислим полученные результаты. На основе результатов раздела 8.1 разработаны алгоритмы синтеза системы управления топливоподачей двигателя внутреннего сгорания с обратной связью по λ -зонду. Показано, что наличие высокочастотной модуляции, связанной с перекрытием клапанов, может сыграть положительную роль вибролинеаризирующего сигнала при использовании разрывного элемента, что позволяет синтезировать систему со свойствами, близкими к системе с непрерывным датчиком. Результаты моделирования системы управления топливоподачей ДВС (параграф 8.2.2) показали эффективность предложенных алгоритмов синтеза систем с релейными измерениями при наличии запаздывания. В разомкнутом контуре воздухоподачи ДВС решена задача оценки переменных воздушного тракта (в том числе, циклового наполнения) по показаниям датчика давления во впускном трубопроводе на основе каскадного синтеза наблюдателя состояния на скользящих режимах. В замкнутом контуре управления топливоподачей проведена дополнительная коррекция вычисленного значения циклового наполнения по показаниям датчика состава отработавших газов (раздел 8.3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. М., 1976.
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М., 1959.
3. Белман Р. Введение в теорию матриц. М., 1976.
4. Брайсон А., Хо Ю Ши. Прикладная теория оптимального управления. М., 1972.
5. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Аналитические методы в теории сингулярных возмущений. М., 1990.
6. Воронов А.А. и др. Теория автоматического управления. М., 1986.
7. Востриков А.С., Юркевич В.Д. Синтез многоканальных систем с вектором скорости в законе управления // *АиТ*. 1993. № 2. С. 51–64.
8. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1967.
9. Геращенко Е.И., Геращенко С.М. Метод разделения движений и оптимизация нелинейных систем. М., 1975.
10. Гладышев С.П. Расчет нелинейных систем на ЭВМ. М., 1987.
11. Грауэрт Г., Либ И., Фишер В. Дифференциальное и интегральное исчисление. М., 1971.
12. Динамика управления роботами. /Под ред. Е.И. Юркевича. М., 1984.
13. Дракунов С.В., Изосимов Д.Б., Лукьянов А.Г., Уткин В.А., Уткин В.И. Принцип блочного управления // *АиТ*. Ч. I. 1990. № 5. С. 3–13; Ч. II. 1990. № 6. С. 20–31.
14. Емельянов С.В. Системы автоматического управления с переменной структурой. М., 1967.
15. Емельянов С.В., Коровин С.К. Новые типы обратной связи. М., 1997.
16. Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем. М., 1970.
17. Исследования по теории многосвязных систем / Сб. под ред. Петрова Б.Н. М., 1982.
18. Калман Р., Фалб П., Арbib М. Очерки по математической теории систем. М., 1971.
19. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М., 1977.
20. Колмановский В. Б., Носов В. Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М., 1981.
21. Краснова С.А., Уткин В.А., Михеев Ю.В. Каскадный синтез наблюдателей состояния нелинейных многомерных систем // *АиТ*. 2001. № 2. С. 43–63.
22. Краснова С.А. Каскадный синтез системы управления манипулятором с учетом динамики электроприводов // *АиТ*. 2001. № 11. С. 51–72.
23. Краснова С.А. Скользящие режимы в задаче оценивания переменных воздушного тракта ДВС // *Датчики и системы*. 2001. № 3. С. 2–6.
24. Краснова С.А. Каскадный синтез наблюдателя состояния для нелинейных систем при наличии внешних возмущений // *АиТ*. 2003. № 1. С. 31–54.
25. Крутов В. И. Автоматическое регулирование и управление двигателями внутреннего сгорания. М., 1989.
26. Кулебакин В.С. К теории автоматических вибрационных регуляторов электрических машин // *Теоретическая и экспериментальная электротехника*. 1932. № 4. С. 3–21.
27. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления. М., 1986.
28. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М., 1977.
29. Лукьянов А.Г. Блочный метод синтеза нелинейных систем на скользящих режимах // *АиТ*. 1998. № 7. С. 14–34.
30. Мееров М.В. Системы многосвязного регулирования. М., 1965.
31. Мирошник И.В., Никифоров В.А., Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб., 2000.
32. Первозванский А.А., Гайцгори В.Г. Декомпозиция, агрегирование и приближенная оптимизация. М., 1979.
33. Петров Б.Н., Рутковский В.Ю., Земляков С.Д. Адаптивное координатно-параметрическое управление нестационарными объектами. М., 1980.
34. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М., 2002.

35. *Рашевский П.К.* Геометрическая теория управлений с частными производными. М., 1947.
36. Современная прикладная теория управления: Синергетический подход в теории управления / Под ред. А.А. Колесникова. Таганрог: Изд-во ТРТУ. 2000.
37. *Старикова М. В.* Автоколебания и скользящий режим в системах автоматического регулирования. М., 1962.
38. Теория систем с переменной структурой / под ред. С.В. Емельянова М., 1970.
39. *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. М., 1998.
40. *Уонем У. М.* Линейные многомерные системы управления. Геометрический подход. М., 1980.
41. *Уткин В. А.* Метод разделения движений в задачах наблюдения // *АиТ.* 1990. № 3. С. 27–37.
42. *Уткин В. А.* Задачи управления асинхронным электроприводом // *АиТ.* 1994. № 12. С. 53–65.
43. *Уткин В.А.* Инвариантность и автономность в системах с разделяемыми движениями // *АиТ.* 2001. № 11. С. 73–94.
44. *Уткин В.А., Краснова С.А.* Блочный подход к синтезу задачи слежения по выходным переменным. М: ИПУ РАН. 2002. Том XVII. С. 102–110.
45. *Уткин В. И.* Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М., 1987.
46. *Уткин В.И.* Принципы идентификации на скользящих режимах // *ДАН СССР.* 1981. Т. 257. № 3. С. 558 - 561.
47. *Фельдбаум А.А.* Электрические системы автоматического регулирования. М., 1957.
48. *Филиппов А.Ф.* Система дифференциальных уравнений с несколькими разрывными функциями // *Математические заметки.* 1980. Т. 27. № 2. С. 255–266.
49. *Цыпкин Я.З.* Основы теории автоматических систем. М., 1977.
50. *Черноусько Ф. Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. М., 1988.
51. *Чиликин М.Г., Ключев В.И., Сандлер А.С.* Теория автоматизированного электропривода. М., 1979.
52. *Chan C.Y.* Robust discrete quassi-sliding mode tracking controller // *Automatica.* 1995. Vol. 31. № 10. P. 1509–1512.
53. *Ciccarella G., Dalla Mora M. And German A.* A Luenberger-like observer for nonlinear systems // *Int. J. Control.* 1993. Vol. 57. № 3. P. 537–556.
54. *Davison E.J.* The output control of linear time - invariant systems with unmeasurable arbitrary disturbances // *IEEE Trans.* 1972. AC-17. № 5. P.621–630.
55. *Dobner D.J.* Dynamic engine models for control development. Part 1: Nonlinear and linear model formulation». Application of Control Theory in the Automotive Industry // *Int. J. Vehicle Design.* SP4. 1983. P. 54–74.
56. *Drazenovici B.* The invariance condition in variable structure systems // *Automatica.* 1969. Vol. 5, № 3. P. 287–295.
57. *Freeman R.A., Kokotovic P.V.* Backstepping design of robust controllers for s class of nonlinear systems // *Preprints of 2nd IFAC Nonlinear Control Systems Design Symposium.* 1992. P. 307–312.
58. *Furukawa T. and Shimemura E.* Predictive control for systems with delay // *Int. J. Control.* 1983. Vol. 37. № 2. P. 399–412.
59. *Gutman S.* Uncertain dynamical systems – a Lypunov min-max approach // *IEEE Transactions on Automatic Control.* AC-24. № 3. 1979. P. 437–443.
60. *Haskara I., Ozguner U. and Utkin V.I.* On sliding mode observers via equivalent control approach // *Int. J. Control.* 1998. № 71. Vol. 6. P. 1051–1067.
61. *Hendricks E., Sorenson S.C.* Mean Value Modelling of Spark Ignition Engines // *SAE Technical.* 1990. Paper 900616.
62. *Isidori A.* Nonlinear control systems. 3rd Ed.. Berlin: Springer-Verlag. 1995.
63. *Jonson C.D.* Futher study of linear regulator with disturbances satisfying a linear differential equation // *IEEE Trans.* 1970. Vol. AC-15. P. 222–228.

64. *Kokotovic P.V., O'Malley R.B., Sannuti P.* Singular perturbation and reduction in control theory // *Automatica*. 1976. № 12. P. 123–132.
65. *Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P.* *Nonlinear and Adaptive Control Design*. New York: Wiley, 1995.
66. *Luenberger D.B.* Observers of multivariable systems // *IEEE Trans.* 1966. Vol. AC-11. P. 190–197.
67. *Minoru O., Toshiharu N., Mamoru F., Yohishige O.* Real Time Control Injection with Compensating Cylinder-by-Cylinder Derivation // *SAE Techn. Pap. Ser.* 1990. № 900778.
68. *Misawa E.A. and Hedrick J.K.* Nonlinear observers - A state of the art survey // *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*. 1989. Vol. 111.
69. *Moraal P.E., Grizzle J.W., Cook J.A.* An observer design for single-sensor individual cylinder pressure control // *Proc. 32th CDC*. 1993.
70. *Morse A.S., Wonham W.M.* Status of Non-interacting Control // *IEEE Trans. Automat. Control*. 1971. Vol. AC-16. № 6. P. 568–581.
71. *Nicosia S., Tomei P.* A global output feedback controller for flexible joint robots // *Automatica*. 1995. Vol. 31. № 10. P. 1465–1469.
72. *Nijmeijer H., A.J. van der Schaft.* *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Berlin: Springer. 1990.
73. *Proychev Ph. and Mishkov R.L.* Transformation of Nonlinear Systems in Observer Canonical Form With Reduced Dependency on Derivatives of the Input // *Automatica*. 1993. Vol. 29. № 2. P. 495–498.
74. *Schumacher J. M.* Compensator synthesis using (C,A,B,-)pairs // *IEEE Trans. Automat. Control*. 1980. Vol. AC-25. P. 1133–1138.
75. *Shouse K.R., Taylor D.G.* Discrete time observer for singularly perturbed continuous time systems // *IEEE Trans. Automat. Control*. 1993.
76. *Slotine J.E., Sastry S.S.* Tracking control of nonlinear systems using sliding surfaces with application to robot manipulators // *Int. J. Control*. 1983. Vol. 38. № 2. P. 465-492.
77. *Slotine J.E.* Sliding controller design for non-linear systems // *Int. J. Control*. 1984. Vol. 40, № 2. P.421-434.
78. *Stepanenko Y., Chun-Yi Su.* Variable structure control of robot manipulators with nonlinear sliding manifolds // *Int. J. Control*. 1993. Vol. 58. № 2. P. 285-300.
79. *Walcott B. L., Corless M. J., Zak S. H.* Observation of dynamical systems in the presence of bounded nonlinearities/uncertainties // *Proc. of 25th Conf. on Decision and Control*. 1986. P. 961–966.
80. *Willems J. C.* Almost Invariant Subspaces: An Approach to High Gain Feedback design. Almost Conditionally Invariant Subspaces // *IEEE Trans. Automat. Control*. Part 1: 1981. Vol. AC-26. № 1. P. 235-252; Part 2: 1982. Vol. AC-27. № 5. P. 1071–1085.
81. *Willems J. C. and Commault C.* Disturbance decoupling by measurement feedback with stability or pole placement // *SIAM. J. Control Optimiz.* 1981. Vol. 19. P. 490–504.
82. *Yuan J., Stepanenko Y.* Composite adaptive control of flexible joint robots // *Automatica*. 1993. Vol. 29. № 3. P. 609-619.
83. *Zinober A.S.* *Variable Structure and Lyapunov Control*. Springer-Verlag, 1993.